" به نام خدا "

تمرین صفحه ۱۵۲

۱. نشان دهید که

a) $$\underbrace{||z_۱|-|z_۲|| \leqslant \rlap{$\overbrace{}^{B}$}|z_۱-z_۲|}_{A} \leqslant |z_۱|+|z_۲|$$

$$\begin{cases} Z_۱ = x_۱ + iy_۱ \\ Z_۲ = x_۱ + iy_۲ \end{cases} \Rightarrow A: \left|\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲} - \sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}\right| \leqslant \sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} \cancel{x_۱^۲}+\cancel{y_۱^۲}+\cancel{x_۲^۲}+\cancel{y_۲^۲}-۲\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲} \leqslant$$

$$\leqslant \cancel{x_۱^۲}+\cancel{x_۲^۲}-۲x_۱x_۲+\cancel{y_۱^۲}+\cancel{y_۲^۲}-۲y_۱y_۲$$

$$\longrightarrow \sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲} \geqslant x_۱x_۲+y_۱y_۲$$

$$\longrightarrow \cancel{x_۱^۲x_۲^۲}+\cancel{y_۱^۲y_۲^۲}+y_۱^۲x_۲^۲+y_۲^۲x_۱^۲ \geqslant \cancel{x_۱^۲x_۲^۲}+\cancel{y_۱^۲y_۲^۲}+۲x_۱x_۲y_۱y_۲$$

$$\longrightarrow (x_۱y_۲-y_۱x_۲)^۲ \geqslant ۰$$ بدیهی

---

b) $$\underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{۲}} \leqslant \rlap{$\overbrace{}^{B}$}|z|}_{A} \leqslant |x|+|y| \quad : \quad Z = x+iy$$

$$A: \frac{|x|+|y|}{\sqrt{۲}} \leqslant \sqrt{x^۲+y^۲} \xrightarrow{\text{توان دو}} x^۲+y^۲+۲|x||y| \leqslant ۲x^۲+۲y^۲$$

$$\rightarrow x^۲+y^۲-۲|x||y| \geqslant ۰ \rightarrow (|x|-|y|)^۲ \geqslant ۰$$ بدیهی

$$B: \sqrt{x^۲+y^۲} \leqslant |x|+|y| \xrightarrow{\text{توان دو}} x^۲+y^۲ \leqslant x^۲+y^۲+۲|x||y| \rightarrow |xy| \geqslant ۰$$

$$B: \sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲} \leqslant \sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}+\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲-۲x_۱x_۲+y_۱^۲+y_۲^۲-۲y_۱y_۲ \leqslant x_۱^۲+y_۱^۲+x_۲^۲+y_۲^۲+۲\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}$$

$$-(x_۱x_۲+y_۱y_۲) \leqslant \sqrt{(x_۱^۲+y_۱^۲)}\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}$$ —— اگر $x_۱x_۲+y_۱y_۲$ باشد بدیهی است

اگر منفی باشد $\xrightarrow{\text{توان دو}} x_۱^۲x_۲^۲+y_۱^۲y_۲^۲+۲x_۱x_۲y_۱y_۲ \leqslant (x_۱^۲+y_۱^۲)(x_۲^۲+y_۲^۲)$

$\Longrightarrow (x_۱y_۲-y_۱x_۲)^۲ \geqslant ۰$

$$c)\ \left|\frac{z_۱}{z_۲+z_۳}\right| \leqslant \frac{|z_۱|}{\big||z_۲|-|z_۳|\big|} \Rightarrow \frac{|z_۱|}{|z_۲+z_۳|} \leqslant \frac{|z_۱|}{\big||z_۲|-|z_۳|\big|} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } |z_۱|}$$

$$\frac{۱}{|z_۲+z_۳|} \leqslant \frac{۱}{\big||z_۲|-|z_۳|\big|} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \big||z_۲|-|z_۳|\big| \leqslant |z_۲+z_۳| \qquad \begin{cases} z_۲=x_۲+iy_۲ \\ z_۳=x_۳+iy_۳ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left|\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}-\sqrt{x_۳^۲+y_۳^۲}\right| \leqslant \sqrt{(x_۲+x_۳)^۲+(y_۲+y_۳)^۲}$$

اگر $x_۲x_۳+y_۲y_۳>۰$ باشد بدیهی است اما اگر منفی باشد: $\xrightarrow{\text{توان دو}} -\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲}\sqrt{x_۳^۲+y_۳^۲} \leqslant x_۲x_۳+y_۲y_۳$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} (x_۲^۲+y_۲^۲)(x_۳^۲+y_۳^۲) \geqslant (x_۲x_۳+y_۲y_۳)^۲ \Rightarrow (x_۲y_۳-x_۳y_۲)^۲ \geqslant ۰$$ که

$$d)\ |z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=۲(|z_۱|^۲+|z_۲|^۲)$$

$$\xrightarrow{a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab} |z_۱+z_۲+z_۱-z_۲|^۲-۲(|z_۱|^۲-|z_۲|^۲)$$

$$۴|z_۱|^۲-۲|z_۱|^۲+۲|z_۲|^۲=۲(|z_۱|^۲+|z_۲|^۲)$$

به کمک سمت راست از جملات اول نیز می‌توان رسید

---

۲. مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید؟

$a)\ \sqrt{-i}$

← ادامه

$\sqrt{-i} = z \Rightarrow z^{۲} = -i = e^{-\pi/۲\, i}$ $\quad z = e^{i((-\pi/۲ + ۲k\pi)/۲)}$

$z_۱ = e^{i(-\pi/۴)}$ $\quad z_۲ = e^{i(-\pi/۴ + \pi)} = e^{i۳\pi/۴}$ $\quad k=۰,۱$

$z_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\quad z_۲ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} i$

---

b) $\sqrt{۱ - i\sqrt{۳}} = z$ $\quad z^{۲} = ۱ - i\sqrt{۳}$ $\quad \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{۳}}{۱} = -\pi/۳$

$z^{۲} = ۲e^{i\pi/۳} \Rightarrow z = \sqrt{۲}\, e^{i((-\pi/۳ + ۲k\pi)/۲)}$ $\quad k=۰,۱$ $\quad \begin{cases} z_۱ = \sqrt{۲}\, e^{i\pi/۲} \\ z_۲ = \sqrt{۲}\, e^{+i۵\pi/۲} \end{cases}$

$z_۱ = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - i/۲\right)$ $\quad z_۲ = \sqrt{۲}\left(\sqrt{۳}/۲ - i/۲\right)$

---

c) $\sqrt[۴]{-۱} = z$ $\quad z^{۴} = -۱ = e^{i\pi}$ $\quad z = e^{i((\pi + ۲k\pi)/۴)}$ $\quad k=۰,۱,۲,۳$

$z_۱ = e^{i\pi/۴}$, $\quad z_۲ = e^{۳\pi/۴\, i}$ $\quad z_۳ = e^{\frac{۵\pi}{۴} i}$ $\quad z_۴ = e^{۷\pi/۴\, i}$

$z_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\quad z_۲ = -\sqrt{۲}/۲ + i\sqrt{۲}/۲$ $\quad z_۳ = \dots$ $\quad z_۴ = \dots$

---

d) $\sqrt[۳]{۱+i} = z$ $\quad z^{۳} = ۱+i = \sqrt{۲}\, e^{i\pi/۴}$

$z = \sqrt[۶]{۲}\, e^{i((\pi/۴ + ۲k\pi)/۳)}$ $\quad k=۰,۱,۲$

$z_۱ = \sqrt[۶]{۲}\, e^{i\pi/۱۲}$ $\quad z_۲ = \sqrt[۶]{۲}\, e^{i۹\pi/۱۲}$ $\quad z_۳ = \sqrt[۶]{۲}\, e^{i\frac{۱۷\pi}{۱۲}}$

---

۳) نشان دهید که

$$۱ + z + z^{۲} + \dots + z^{n} = \frac{۱ - z^{n+1}}{۱ - z}$$

د) با توجه به آن ثابت کنید که

$$1+\cos\theta+\cos ۲\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{۱}{۲}+\frac{\sin[(n+۱/۲)\theta]}{۲\sin(\theta/۲)}\ ; \qquad ۰<\theta<۲\pi$$

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \qquad 1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos ۲\theta+i\sin ۲\theta+\dots+\cos n\theta+i\sin n\theta, \frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$1+\cos\theta+\cos ۲\theta+\dots+\cos n\theta=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}\right\}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم

$$=\frac{(\overbrace{1-\cos(n+1)\theta}^{۲\sin^{۲}(n+1)\theta/۲}-i\sin(n+1)\theta)\cdot(\overbrace{1-\cos\theta}^{۲\sin^{۲}\theta/۲}+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^{۲}+\sin^{۲}\theta}\Rightarrow \text{Ⓘ}$$

$$\mathrm{Re}\{I\}=\frac{۴\sin^{۲}\frac{n+1}{۲}\theta\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}+\overbrace{\sin\theta}^{۲\sin\theta/۲\cos\theta/۲}\overbrace{\sin(n+1)\theta}^{۲\sin\frac{n+1}{۲}\theta\cos\frac{n+1}{۲}\theta}}{1+\cos^{۲}\theta-۲\cos\theta+\sin^{۲}\theta}=\frac{''}{۴(\sin^{۲}\theta/۲)}$$

$$=\frac{(۴\sin(\frac{n+1}{۲})\theta\sin\theta/۲)(\sin\frac{n+1}{۲}\theta\sin\theta/۲+\cos\theta/۲\cos\frac{n+1}{۲}\theta}{۴\sin^{۲}\theta/۲}=$$

$$\frac{۲(\sin\frac{n+1}{۲}\theta)(\cos(\frac{n+1}{۲}\theta-\theta/۲))}{۲\sin\theta/۲}=\frac{\sin(\overset{(n+1/۲)\theta}{\cancel{\frac{n+1}{۲}\theta+\frac{n\theta}{۲}}})+\sin(\overset{\theta/۲}{\cancel{\frac{n+1}{۲}\theta-\frac{n\theta}{۲}}})}{۲\sin\theta/۲}$$

$$=۱/۲+\frac{\sin(n+۱/۲)\theta}{۲\sin\theta/۲}$$

---

۴) نشان دهید که اگر z یکی از ریشه‌های nام واحد باشد و $z\neq ۱$ آنگاه

$$1+z+z^{۲}+\dots+z^{n-1}=۰$$

$$z^{n}=۱ \Rightarrow z=\exp\left(\frac{i۲k\pi}{n}\right)$$

$$1+z+z^{۲}+\dots+z^{n-1}=1+\exp\left(\frac{i۲\pi}{n}\right)+\exp\left(\frac{i۴\pi}{n}\right)+\dots+\exp\left(i\frac{۲(n-1}{n}\right.$$

$$=\frac{1(1-\exp((\frac{i۲\pi}{n})n)}{1-\exp(\frac{i۲\pi}{n})}=\frac{1-\exp(i۲\pi)}{\alpha}=۰$$

تمرینات صفحه ١٦٤

۱ـ با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که هریک از توابع زیر دارای مشتق هستند و یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید؟

a) $f(z) = z|z|^2$

$$z = x + iy \Rightarrow f(z) = x(x^2+y^2) + iy(x^2+y^2)$$

$$u = x(x^2+y^2) \quad , \quad v = y(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

① $x^2+y^2+2x^2 = x^2+y^2+2y^2 \Rightarrow x = y$

② $2xy = -2xy \Rightarrow x = y = 0$ ـــ در نقطه صفر مشتق دارد.

---

b) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \qquad z = x + iy$

$f(z) = x + y \qquad u = x + y \qquad v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 1 = 0$$

۲ـ نقاطی را که هریک از توابع زیر مشتق پذیر، تحلیلی و یا غیر تحلیلی هستند را مشخص کنید؟

a) $f(z) = z^3 \Rightarrow f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$

$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$$u = x^{۳} - ۳xy^{۲} \quad , \quad v = ۳x^{۲}y - y^{۳}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow ۳x^{۲} - ۳y^{۲} = ۳x^{۲} - ۳y^{۲}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -۶xy = -۶xy$$

در تمام نقاط مشتق پذیر و تحلیلی است.

---

b) $f(z) = i|z|^{۴} = i(x^{۲}+y^{۲})^{۲} = i(x^{۴}+y^{۴}+۲x^{۲}y^{۲})$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ۴x^{۳}+۴xy^{۲} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow ۴x^{۳}+۴xy^{۲} = ۰ \quad , x = ۰$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = ۴y^{۳}+۴yx^{۲} \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۴y^{۳}+۴yx^{۲} = ۰ \quad y = ۰$$

پس $f(z)$ در نقطه $(۰،۰)$ تحلیلی است.

---

c) $f(z) = \frac{\text{Re } z}{\text{Im } z} = \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۱}{y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow \frac{۱}{y} = ۰$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^{۲}} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow \frac{-x}{y^{۲}} = ۰ \Longrightarrow \begin{matrix} x = ۰ \\ y \neq ۰ \end{matrix}$$

---

d) $f(z) = (۱+i)(x-y)^{۲} = \underbrace{(x-y)^{۲}}_{u} + i\underbrace{(x-y)^{۲}}_{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow ۲(x-y) = -۲(x-y) \Longrightarrow \boxed{x = y}$$ تحلیلی است

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow -۲(x-y) = -۲(x-y)$$

e) $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{x+iy}{x-iy}\times\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x^{۲}+۲ixy+i^{۲}y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}=$

$$=\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+\frac{۲xyi}{x^{۲}+y^{۲}}\Longrightarrow u=\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\;,\quad v=\frac{۲xy}{x^{۲}+y^{۲}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۲x(x^{۲}+y^{۲})-۲x(x^{۲}-y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=\frac{۴xy^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{۲xy^{۲}-۲x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=\frac{۴xy^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-۲y(x^{۲}+y^{۲})-۲y(x^{۲}-y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}=\frac{-۴x^{۲}y}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-۲y(x^{۲}+y^{۲})+۲x(۲xy)}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$$

) $f(z)=\operatorname{Arg} z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$u=\tan^{-1}\frac{y}{x}\qquad v=۰$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-y/x^{۲}}{1+y^{۲}/x^{۲}}=\frac{-y/x^{۲}}{\underline{x^{۲}-y^{۲}}}=\;=\;=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1/x}{1+y^{۲}/x^{۲}}=\frac{\frac{1}{x}\,x^{۲}}{\frac{x^{۲}+y^{۲}}{x^{۲}}}=\frac{\frac{1}{x}\,x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}=\;=\;=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

۳- آیا توابع زیر همساز هستند؟ درصورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آن ها را بیابید و توابع تحلیلی متناظر با آن ها را بصورت تابعی از z بنویسید؟

a) $u = e^x \cos y$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y & u_{xx} = e^x \cos y \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = ۰ \\ u_y = -e^x \sin y & u_{yy} = -e^x \cos y \end{cases}$$

همساز است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

b) $u = (x^۲ - y^۲)^۲$

مشابه مورد بالا

c) $u = x^۳ - ۳xy^۲$

مشابه مورد (۵) حل می شود.

د) $u = x^۲ - y^۲ - ۲x + ۳y$

$$\begin{cases} u_x = ۲x - ۲ & u_{xx} = ۲ \\ u_y = -۲y + ۳ & u_{yy} = -۲ \end{cases} \qquad u_{xx} + u_{yy} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲ = ۰$$

در معادله لاپلاس صدق می‌کند پس تحلیلی هست.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = ۲x - ۲$$

$\phi(x) = -۳x$

$\phi'(x) = -۳$

$$v = ۲xy - ۲y + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = ۲y + \phi'(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -۲y + ۳ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = ۲y - ۳$$

$$v = ۲xy - ۲y - ۳x$$

ه) $u = \dfrac{x}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow u_x = \dfrac{x^۲ + y^۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \dfrac{y^۲ - x^۲}{(x^۲ - y^۲)^۲}$

$$u_{xx} = \frac{-۲x(x^۲ + y^۲)^۲ - (۴x(x^۲ + y^۲))(y^۲ - x^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$u_{xx} = \frac{-۲x(x^4 + y^4 + ۲x^۲y^۲) - (۴x^۳ + ۴xy^۲)(y^۲ - x^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$u_y = \frac{-۲yx}{(x^۲ + y^۲)^۲} \Rightarrow u_{yy} = \frac{-۲x(x^۲ + y^۲)^۲ - ۴y(x^۲ + y^۲) - ۲xy}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$u_{yy} = \frac{-۲x(x^4 + y^4 + ۲x^۲y^۲) + ۸xy^۲(x^۲ + y^۲)}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq ۰$$

و) $u = ۲xy \to u_x = ۲y \,,\ u_{xx} = ۰ \to u_y = ۲x \,,\ u_{yy} = ۰ \qquad ۰ + ۰ = ۰$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = ۲x \qquad v = y^۲ + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\phi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ۲x \to -۲x = \phi'(x) \Rightarrow \phi(x) = -x^۲ \Rightarrow v = y^۲ - x^۲$$

۴ - a را طوری بیابید که هریک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آن ها را بیابید؟

a) $u = e^{ax}\cos by$

$u_{xx} = a^2 e^{ax}\cos by \qquad u_{yy} = -b^2 e^{ax}\cos by$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow a^2 e^{ax}\cos by - b^2 e^{ax}\cos by = 0$

$\Rightarrow e^{ax}\cos by\,(a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$

به شرط مساوی بودن a و b ، همساز است.

$u = e^{ax}\cos ay \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}\cos ay = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax}\sin ay$

$v(y) = e^{ax}\sin ay + \varnothing(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -a e^{ax}\cos ay - \varnothing'(x)$

$\varnothing(x) = -x \qquad -\varnothing'(x) = 1 \Rightarrow \varnothing'(x) = -1$

$\Rightarrow v(y) = e^{ax}\sin ay - x$

---

b) $u = \cos ax \cosh by$

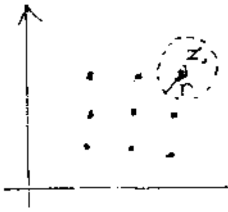
$u_{xx} = -a^2 \cos ax \cosh by \rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_{yy} = b^2 \cos ax \cosh by \rightarrow \cos ax \cosh by\,(b^2 - a^2) = 0$

$b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm a$ همساز است

ادامه سؤال مانند قسمت الف می باشد

یک نقطه از اعداد صحیح هم از کرد. چون تعداد اعضا متناهی است پس قطعاً وجود دارد یک همسایگی از z_0 که شامل هیچ نقطه از D نباشد مثلاً فرض کنید ناحیه D به صورت زیر باشد:



حال هیچ نقطه از D نیست پس z_0 نقطه انباشتگی D نیست.

۷ـ تابع $f(z)=|z|^2$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

حل: تابع $f(z)$ یک تابع چندجمله‌ای است چون $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$

توابع چندجمله‌ای در تمامی نقاط پیوسته هستند پس $f(z)$ در تمامی صفحه مختلط $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ پیوسته است

۸ـ هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته بوده و $f(z_0)\neq 0$ آن گاه یک همسایگی از z_0 موجود است که به ازای هر z از این همسایگی $f(z)\neq 0$ است.

حل: $f(z)$ در z_0 پیوسته است پس $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ پس داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ni |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

و چون $f(z_0)$ صفر نیست می‌توان شعاع همسایگی آن را یعنی پیرامون $f(z_0)$ را r را انتخاب کرد: $r=\frac{1}{2}|f(z_0)|$ و چون پیوسته است پس حد موجود است:

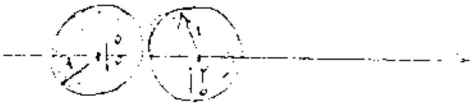
$$\exists \delta_1>0 \ni |z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<r \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$$

پس یک همسایگی $N_{\delta_1}(z_0)$ که نقش آن $f(z)$ در دایره‌ای به شعاع r و مرکز $f(z_0)$ می‌شود و چون $f(z_0)\neq 0$ است در $N_{\delta_1}(z_0)$ برهان

[illegible] $\delta=\delta_1$ است

۵ـ هرگاه D مجموعه همه zهایی باشد که $|z|<1$ یا $|z-2|<1$ آنگاه D همبند نیست.

حل: ناحیه D اجتماع دو دایره به شعاع ۱ در مرکزهای (۰،۰) و (۲،۰) هست به مانند شکل زیر: چون نقاط روی ناحیه D را شامل نمی‌شوند پس دو نقطه a و b وجود دارند که نتوان آنها را با یک خط شکسته (تعریف همبند) به هم وصل کرد، پس همبند نیست.



۶ـ نقطه z_0 را یک نقطه انباشتگی مجموعه D نامند هرگاه هر همسایگی از z_0 شامل نقطه‌ای از D باشد. با توجه به این تعریف نشان دهید:

الف) هر یک از نقاط یک مجموعه باز و همبند یک نقطه انباشتگی آن است.

حل: ۱) ناحیه D را یک مجموعه باز گویند هرگاه: $\exists \varepsilon>0 \ni N_\varepsilon(z_0) \subset D$

یعنی در مجموعه باز همواره پیرامون تمامی نقاط آن یک همسایگی به شعاع ε موجود است پس هر نقطه مجموعه D (باز) یک نقطه انباشتگی آن است.

۲) ناحیه D را همبند گویند هرگاه بتوان هر دو نقطه دلخواه را با خط شکسته به هم وصل کرد پس در ناحیه همبند هیچ نقطه منفرد (ایزوله) یافت نمی‌شود در نتیجه $N_\varepsilon(z_0)$ شامل حداقل یک نقطه است پس z_0 یک نقطه انباشتگی است.

ب) یک مجموعه متناهی نمی‌تواند شامل نقطه انباشتگی باشد.

مجموعه‌ای متناهی است که $\exists k \in N \ni D \sim N_k$ یعنی بتوان آن مجموعه را با

۹- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد آنگاه f یک تابع ثابت است اگر:

الف) $\bar{f}(z)$ نیز در D تحلیلی باشد.
ج) به ازای هر z از D مقدار f حقیقی باشد.

ب) $|f|$ در D ثابت باشد.
د) $Re f(z)$ عددی ثابت باشد.

حل: الف) راه اول

$$f(z)\ \text{تحلیلی} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$$

$$f(z) = u + iv \Rightarrow \bar{f}(z) = u - iv \xRightarrow{\text{و از تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = +v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_y = -v_y \Rightarrow v_y = 0 \\ v_x = -v_x \Rightarrow v_x = 0 \end{cases} \quad \text{و } v \text{ ثابت است} \quad \begin{cases} u_x = -u_x \Rightarrow u_x = 0 \\ u_y = -u_y \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \ u \text{ نیز ثابت است}$$

در تابع f اگر u و v ثابت باشند کل تابع نیز ثابت است.

راه دوم:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \quad (1 \\ v_x &= -u_y \quad (2 \end{aligned}\right\} \quad \bar{f}(z) = u - iv \ \text{تحلیلی است} \Rightarrow \begin{cases} u_x = (-v)_y = -v_y \quad (1)' \\ u_y = -(-v)_x = +v_x \quad (2)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1),(1)' \Rightarrow u_x = 0 \\ (2),(2)' \Rightarrow v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c_1 \ , \ v(x,y) = c_2 \Rightarrow \bar{f}(z) = c_1 + ic_2$$

یعنی ثابت است

حل ب) $|f| = c$ پس $u^2 + v^2 = c$ از طرفین رابطه یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ u_y + v_y = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{u_x = v_y \\ v_x = -u_y}]{\text{چون تحلیلی است}} \begin{cases} v_y - u_y = 0 \\ v_y + u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = 0 \quad (1 \\ v_y = 0 \quad (2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ -v_x + u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_x = 0 \quad (1' \\ v_x = 0 \quad (2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1),(1)' : u(x,y) = c_1 \\ (2),(2)' : v(x,y) = c_2 \end{matrix} \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

ثابت است

حل ج) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k + i0 \ , \ \forall z \in D \Rightarrow f(z) = Real = k$

$$\Rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \\ v_y = 0 \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c \Rightarrow f(z) = c$$

یعنی f ثابت است

حل د)

$$\operatorname{Re} f(z) = k \Rightarrow u(x,y) = k \Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \Rightarrow v_y = 0 \\ u_y = 0 \Rightarrow v_x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v(x,y) = c' \Rightarrow f(z) = k + ic' = c$ تابعی ثابت است

۱۰- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بوده و همواره $f'(z) = 0$ باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است

حل: $f(z)$ در D تحلیلی است پس توابع u و v پیوسته و دارای مشتق های جزئی پیوسته هستند و در شرایط کشی - ریمان صدق می کنند

$f'(z) = u_x + iv_x = 0$

$$\begin{tikzcd} u_x = 0 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, "(1)"] & v_y = 0 \\ v_x = 0 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ur, "(2)"'] & u_y = 0 \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{matrix} (1): & u(x,y) = c_1 \\ (2): & v(x,y) = c_2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2 = c$

تابعی ثابت است

۱۱- مشتق هریک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که تحلیلی هستند مشخص کنید

a) $f(z) = \underbrace{|x|}_{u} + i\underbrace{|y|}_{v} \xrightarrow{\text{برای تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad u_x = \dfrac{x}{|x|}, \quad u_y = 0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{y}{|y|} \Rightarrow xy > 0$

در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$v_x = 0, \quad v_y = \dfrac{y}{|y|} \Rightarrow |x| = \dfrac{x|y|}{y} = |x| \Rightarrow f(z) = \dfrac{x|y|}{y} + i|y|$

$f'(z) = u_x + iv(x) = \dfrac{|y|}{y} + i\dfrac{y}{|y|} = \dfrac{y}{|y|}(1+i)$

b) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{|z|}$

$z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy \Rightarrow f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$u_x=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$v_y=\dfrac{-\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\xrightarrow{\text{تساوی}} y^2=-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=0$

دایره‌ای به شعاع صفر
به مرکز مبدأ مختصات در $|z|=0$ تحلیلی است
و مقدار مشتق صفر است

---

c) $f(z)=(\overbrace{\operatorname{Re} z}^{u})^2-i(\overbrace{\operatorname{Im} z}^{v})^2 \Rightarrow f(z)=x^2+iy^2$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\operatorname{Re}\{z+\Delta z\}^2-i\operatorname{Im}\{z+\Delta z\}^2-x^2+iy^2}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\cancel{x^2}+\Delta x^2+x2x\Delta x-\cancel{iy^2}-i\Delta y^2-i2y\Delta y-\cancel{x^2}+\cancel{iy^2}}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\begin{cases}\Delta x\to 0:\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-i\Delta y(\Delta y+2y)}{i\Delta y}=-2y\\[2ex] \Delta y\to 0:\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+\Delta x^2+2x\Delta x-\cancel{x^2}}{\Delta x}=2x\end{cases} \Rightarrow 2x=-2y \Rightarrow x=-y$$

روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم تحلیلی است

$x=-y \Rightarrow f(z)=y^2-iy^2 \Rightarrow \begin{cases}u=y^2\\ v=-y^2\end{cases} \Rightarrow f'(z)=u_y-iv_y$

$\Rightarrow f'(z)=2y+i2y$ در $x=-y$

---

d) $f(z)=\underbrace{|y|}_{u}-i\underbrace{|x|}_{v} \longrightarrow u_x=v_y \quad , u_y=\dfrac{y}{|y|} \ , v_x=\dfrac{-x}{|x|}$

$u_y=-v_x \Rightarrow \dfrac{y}{|y|}=\dfrac{x}{|x|} \Rightarrow xy>0$ در ربع اول و سوم تحلیلی است

$|x|=\dfrac{x|y|}{y} \Rightarrow f(z)=|y|-i\dfrac{x|y|}{y}$

$f'(z)=u_y-iv_y \Rightarrow f'(z)=\dfrac{y}{|y|}+i\dfrac{|y|}{y}=\dfrac{|y|}{y}(1+i)$

e) $f(z) = \underbrace{\cos(x+y)}_{u} + i\underbrace{\cos(x-y)}_{v}$ / $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\begin{cases} u_x = -\sin(x+y) \\ v_y = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \Rightarrow -\sin(x+y) = \sin(x-y) \Rightarrow$$

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos y = ۰$$

$$\begin{cases} u_y = -\sin(x+y) \\ -v_x = \sin(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ & x = k\pi \\ \cos y = ۰ & y = ۲k\pi \pm \pi/۲ \end{cases}$$

همانند بالائی است.

تابع در محل برخورد این دسته خطوط تحلیلی است

در خود این خطوط نیز تحلیلی می باشد و مقدار مشتق در نقاط برخورد صفر است.

$$x = k\pi \Rightarrow f(z) = \cos(k\pi + y) + i\cos(k\pi - y) \Rightarrow f'(z) = -\sin(k\pi + y)$$

$$- i\sin(k\pi - y)\Big|_{y = ۲k\pi \pm \pi/۲} \Rightarrow f'(z) = 0$$

f) $f(z) = \underbrace{\cos x}_{u} + i\underbrace{\cos y}_{v}$ $\begin{cases} u_x = -\sin x \\ v_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin y$

$f(z) = \cos(۲k\pi + y) + i\cos y)$ در این نقاط تحلیلی است $\begin{cases} x = ۲k\pi + y \\ x = ۲k\pi + \pi - y \end{cases}$

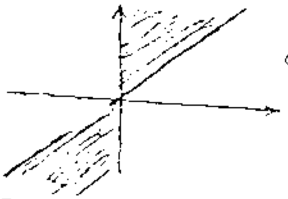
$$f(z) = \cos y + i\cos y \Rightarrow f'(z) = -\sin y + i\sin y$$

g) $f(z) = |x-y| + i|x+y|$: $u_x = v_y \Rightarrow \dfrac{x-y}{|x-y|} = \dfrac{x+y}{|x+y|} \Rightarrow$

$$(x-y)(x+y) > ۰ \xrightarrow[x<-y]{x>y} f(z) = x - y + i(x+y) \rightarrow \begin{matrix} u_x = ۱ \\ v_x = ۱ \end{matrix}$$

تحلیلی

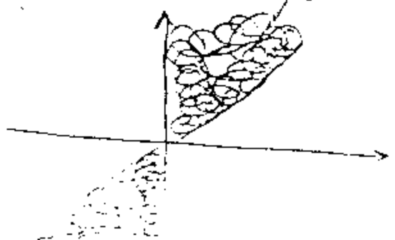
$f'(z) = ۱ + i$



h) $f(z) = |x^۲ - y^۲| + ۲i|xy|$ $u_x = v_y \rightarrow \dfrac{۲x(x^۲-y^۲)}{|x^۲-y^۲|} = \dfrac{۲x^۲y}{|xy|}$

$$\rightarrow \frac{x^۲-y^۲}{|x^۲-y^۲|} = \frac{xy}{|xy|} \rightarrow xy(x^۴ - y^۴) > ۰$$

در این نواحی



۳.۱۰. تمرینات: صفحات (۱۸۸ تا ۱۹۲)

۱- نقش هریک از منحنی های زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

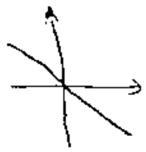
a) $y=-x$

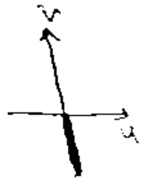
$$w = x^2-y^2+2xyi$$

$u=x^2-y^2$

$v=2xy$

$$y=-x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-2x^2 \leq 0 \end{cases} \quad w=-2x^2 i$$


صفحه‌ی z

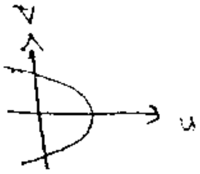


صفحه‌ی w

b) $x=3$

$$\begin{vmatrix} u=3^2-y^2 \\ v=6y \end{vmatrix} \rightarrow u=9-\frac{v^2}{36} \rightarrow u+\frac{v^2}{36}=9$$

صفحه‌ی z

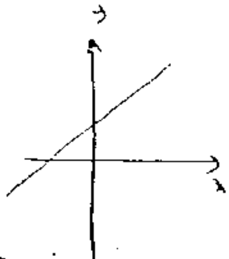


صفحه‌ی w

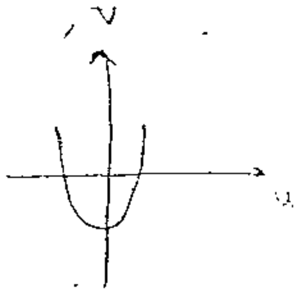
c) $y=1+x$

$$\begin{vmatrix} u=x^2-(1+x)^2 \\ v=2x(1+x) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u=2x+1 \\ v=2x^2+2x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\frac{u-1}{2} \Rightarrow v=\frac{u^2-1}{2}$$



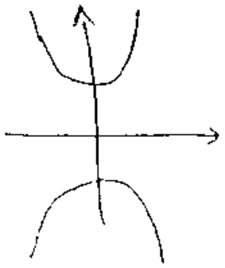
صفحه‌ی z

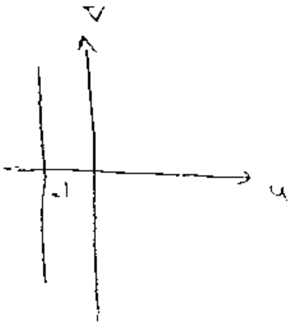


صفحه‌ی w

d) $y^2=x^2+1$

$$\begin{vmatrix} u=x^2-x^2-1 \Rightarrow u=-1 \\ v=2x\sqrt{x^2+1} \end{vmatrix}$$

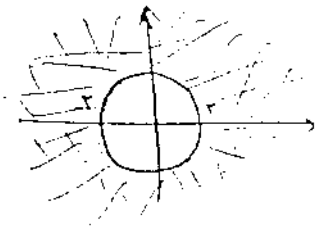

صفحه‌ی z

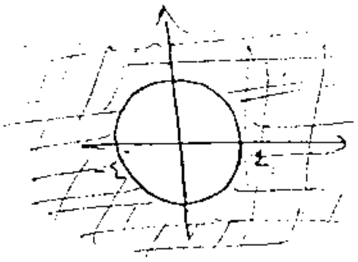


صفحه‌ی w

۲- نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w=z^{۲}$ بیابید.

a) $|z|>۲ \longrightarrow |w|=|z^{۲}|=|z|^{۲}>۲^{۲} \longrightarrow |w|>۴$

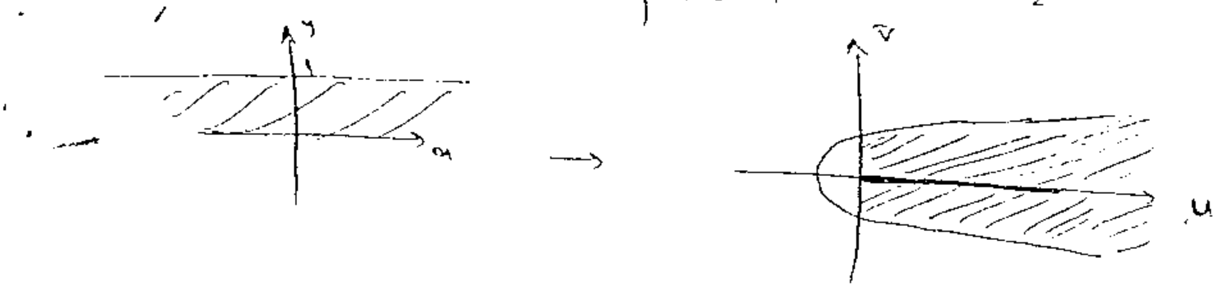




b) $0<y<1$

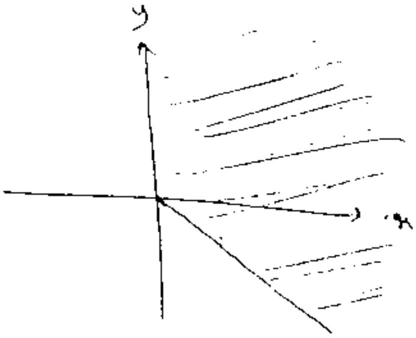
$$z^{۲}=\left|\begin{array}{l}u=x^{۲}-y^{۲}\\ v=۲xy\end{array}\right. \qquad \text{if } y=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}u=x^{۲}\\ v=0\end{array}\right.$$

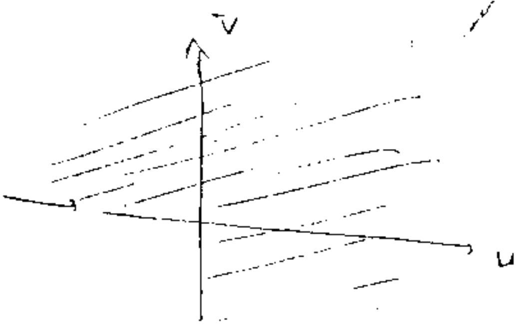
$$\text{if } y=1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}u=x^{۲}-1\\ v=۲x\end{array}\right. \Longrightarrow u=\frac{v^{۲}}{۴}-1$$



c) $-\frac{\pi}{۴}<\arg z<\frac{\pi}{۴} \longrightarrow z=re^{i\theta} \longrightarrow z^{۲}=r^{۲}e^{۲\theta i}$

$$-\frac{\pi}{۴}<\theta<\frac{\pi}{۴} \longrightarrow -\frac{\pi}{۲}<۲\theta<\pi$$





۳- نقش هریک از منحنی‌های زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید:

a) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{array}{l}\arg z=-\arg w\\ |w|=\frac{1}{|z|}\end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\arg w<0$$

b) $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}$

c) $0<x<1 \quad 0<y<1$

$$w=\frac{1}{z} \rightarrow z=\frac{1}{w}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \quad \left|\begin{array}{l}x=\frac{u}{u^2+v^2}\\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}\end{array}\right.$$

$x=0 \longrightarrow u=0$

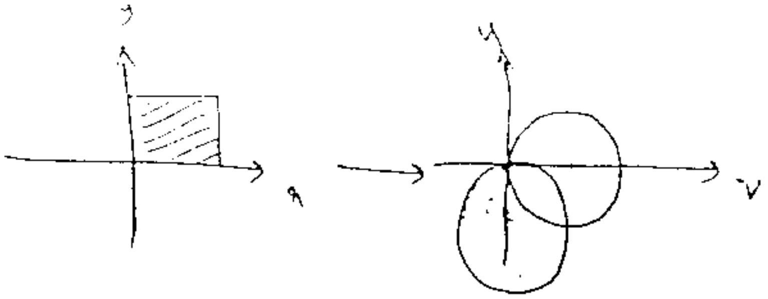
$x=1 \Rightarrow u^2+v^2=u \longrightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4} \rightarrow |u-\frac{1}{2}+iv|=\frac{1}{2}$

$|w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

$y=0 \longrightarrow v=0$

$y=1 \longrightarrow 1=-\frac{v}{u^2+v^2} \rightarrow u^2+v^2+v=0 \rightarrow u^2+(v+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$|u+iv+\frac{1}{2}i|=\frac{1}{2} \Rightarrow |w+\frac{i}{2}|=$



٤- نقش هر یک از انواع زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید:

a) $|z+1| = 1 \longrightarrow \left|\frac{1}{w} + 1\right| = 1 \longrightarrow \frac{|1+w|}{|w|} = 1 \longrightarrow |1+w| = |w|$

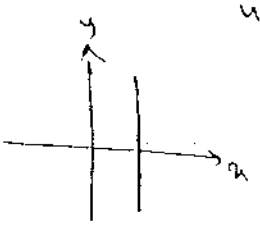
$|(u+1+iv)|^۲ = |u+iv|^۲ \longrightarrow (u+1)^۲ + v^۲ = u^۲ + v^۲ \longrightarrow u = -\frac{1}{۲}$

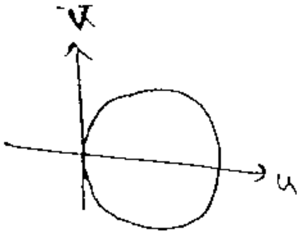
b) $y = x - 1$ $\qquad z = \frac{1}{w} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{u^۲+v^۲} \\ y = \frac{-v}{u^۲+v^۲} \end{array} \right. \longrightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow \frac{u}{u^۲+v^۲} + \frac{v}{u^۲+v^۲} = 1 \Rightarrow u + v = u^۲ + v^۲$

$\Rightarrow (u - \frac{1}{۲})^۲ + (v + \frac{1}{۲})^۲ = (\frac{1}{\sqrt{۲}})^۲$.

c) $x = T \Rightarrow 1 = \frac{u}{u^۲+v^۲} \rightarrow u^۲ + v^۲ = u \Rightarrow (u - \frac{1}{۲})^۲ + v^۲ = \frac{1}{٤}$





d) $|z - ۳i| = ۳$ $\qquad \left|\frac{1}{w} - ۳i\right| = ۳$

$\frac{|1 - ۳wi|}{|w|} = ۳ \longrightarrow |1 - ۳iu + ۳v| = ۳|w|$

$\longrightarrow (1 + ۳v)^۲ + (۳u)^۲ = ۹(u^۲ + v^۲) \rightarrow u^۲ = -\frac{1}{۹} \Rightarrow u = \pm \frac{1}{۳} i$

۵ـ نقش ناحیه $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$ را با هریک از نگاشت‌های زیر بیابید:

a) $w = iz \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

b) $w = z^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

c) $w = iz^2 \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$

d) $w = -iz^2 \longrightarrow w = r^2 e^{2i\theta} e^{-\frac{\pi}{2}i} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

e) $w = r^3 e^{3i\theta} = z^3 \longrightarrow 0 < \arg w < \frac{3\pi}{4}$

۶ـ تبدیل موبیوسی بیابید

$w_3\ w_2\ w_1 \qquad z_3\ z_2\ z_1$

a-f سه نقطه‌ی ۰ و ۱ و ۲ را به روی ۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ بنگارد

$$\frac{w-1}{w-\frac{1}{3}} \times \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{z-0}{z-2} \times \frac{1-2}{1}$$

b-) i- و ۰ و i را به روی ۰ و ۱- و ∞ بنگارد.

$$\frac{w-0}{w-\infty} \times \frac{-1-\infty}{-1-0} = \frac{z+i}{z-i} \times \frac{0-i}{0+i}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{w-\infty}{-1-\infty}\right)\frac{-1}{w} = -\frac{z+i}{z-i} \Rrightarrow (1)\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

c-) $z=0$ یک نقطه‌ی ثابت آن باشد

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = z_1$$

$$\text{if } (z_1 = 0) \Rightarrow \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + d} = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

d) ناحیه‌ی $|z|<1$ را به روی $|w|<1$ طوری بنگارید که $z=\frac{i}{4}$ به روی $w=0$ نگاشته شود.

$$\frac{w-1}{w-0}\times\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z+1}{z-\frac{i}{4}}\times\frac{1-\frac{i}{4}}{1+1}=\frac{(z-1)i}{z-i}$$

e) ناحیه‌ی $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ را به روی قرص واحد $|w|=1$ بنگارید.

مانند مثال حل شده در صفحه‌ی ۱۷۶ کتاب دکتر شیدفر داریم:

$w_1=z^4 \longrightarrow$ ناحیه را به $\mathrm{Im}(z)>0$ تبدیل می‌کند

$$w=e^{i\alpha}\frac{z^4-z_0}{z^4-\bar{z}_0}\ ;\ \mathrm{Im}(z_0)>0$$

f) نقاط i و -i نقاط ثابت تبدیلات آن باشند.

* حل

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

$z_1=i \Rightarrow ai+b=i(ci+d)=-c+id$ HX1

$z_2=-i \Rightarrow -ai+b=-i(-ci+d)=-c-di$ XH2

HX1 + XH2 $\Rightarrow b=-c \Rightarrow c=-b$

HX1 - XH2 $\Rightarrow ai=di \Rightarrow d=a$

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+b}{-bz+a}=\frac{b+az}{a-bz}\qquad \forall a,b\in\not\subset$$

۱۰- ثابت کنید که اگر مبدأ مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دو خطی باشد آنگاه آن تبدیل را می‌توان به صورت $w = \frac{z}{cz+d}$ نوشت.

* اثبات:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$f(z) = z \xRightarrow[z=0]{\text{اگر}} \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow w = \frac{z}{\frac{c}{a}z + \frac{d}{a}} = \frac{z}{c'z+d'}$$

۱۱- نشان دهید با تبدیل $w = \frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1| \leq 1$ به روی نیم صفحه $\operatorname{Re} w \leq 0$ نگاشته می‌شود.

* اثبات:

$$w = \frac{z-2}{z} = 1 - \frac{2}{z}$$

نگاشت w ابتدا $|z-1| \leq 1$ را تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ تصویر کرده و سپس با تبدیل $2e^{i\pi}$ دوبرابر کرده و به اندازه π رادیان دوران می‌دهند و در نهایت به اندازه $1+0i$ جابجا می‌کند.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \qquad x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad , \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

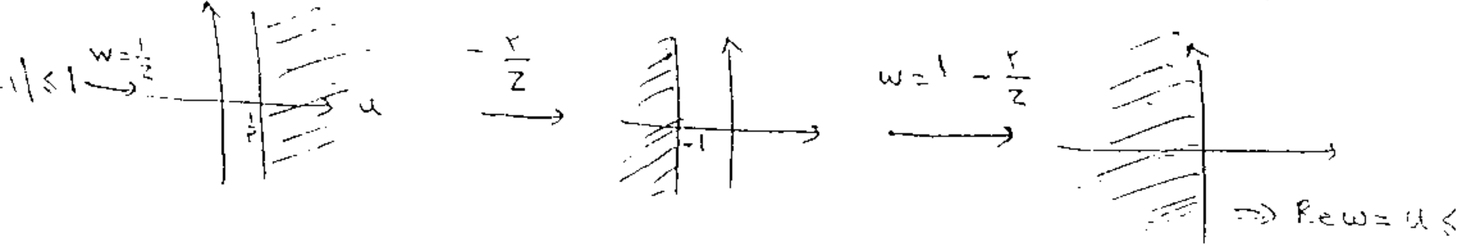
$$|z-1| \leq 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$(x-1) = \frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow (u-u^2-v^2)^2 + v^2 \leq (u^2+v^2)^2$$

معادل زیر تبدیل $\Rightarrow$ $u^2 - 2u^3 - 2uv^2 + v^2 \leq 0 \Rightarrow u^2(1-2u) + v^2(1-2u) \leq 0$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)(1-2u) \leq 0 \Rightarrow (1-2u) \leq 0 \Rightarrow u \geq \frac{1}{2}$$



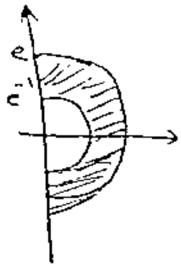
$\Rightarrow \operatorname{Re} w = u \leq$

۱۲- نقش ناحیه‌های زیر را با تبدیل $w=e^z$ بیابید.

a) $-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}$ و $-۱ < x < ۱$

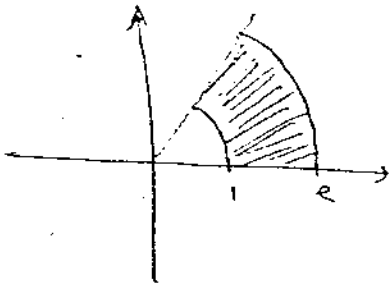
$w = e^x e^{iy}$ $\rho = e^x$ و $-۱ < x < ۱ \Rightarrow e^{-۱} < \rho < e$

زاویه $\varphi = y$ $-\frac{\pi}{۲} < \varphi < \frac{\pi}{۲}$



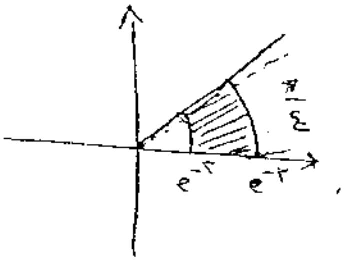
b) $۰ < x < ۲ \Rightarrow ۱ < \rho < e^۲$

$۰ < y < ۱ \Rightarrow ۰ < \varphi < ۱$



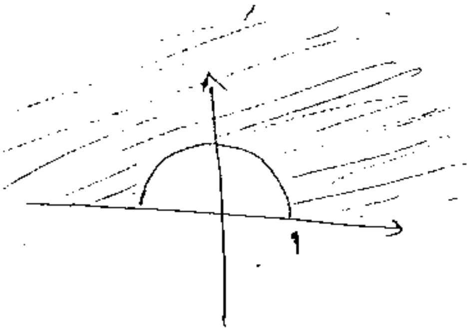
c) $-۳ < x < -۲ \Rightarrow e^{-۳} < \rho < e^{-۲}$

$۰ < \quad < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ < \varphi < \frac{\pi}{۲}$



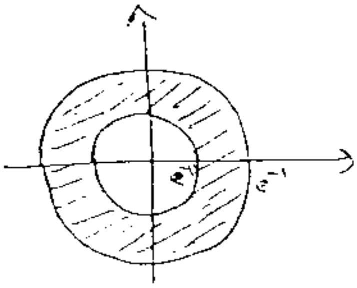
d) $x \geq ۰ \Rightarrow \rho \geq ۱$

$۰ < y < \pi \Rightarrow ۰ < \varphi < \pi$



e) $-۱ \leq x \leq ۳ \Rightarrow e^{-۱} < \rho < e^۳$

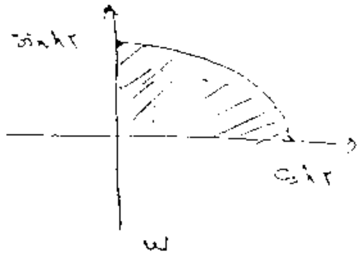
$-\pi < y < \pi \Rightarrow -\pi < \varphi < \pi$



۱۳ـ منحنی‌های مرکب از نواحی زیر را با نگاشت $w = \sin z$ بیابید.

$w=\sin z \rightarrow w=\sin x\cosh y+i\sinh y\cos x$

$u=\sin x\cosh y \qquad v=\sinh y\cos x$



$y=0,\ 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<u<1,\ v=0$

$y=2,\ 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2}+\frac{v^2}{\sinh^2 2}=1$

$x=\frac{\pi}{2},\ 0<y<2 \Rightarrow 0<u<\cosh 2,\ v=0$

$x=0,\ 0<y<2 \Rightarrow u=0,\ v=\sinh y \Rightarrow 0<v<\sinh 2$

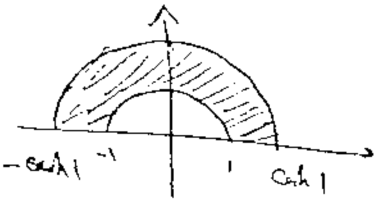
b) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \qquad 0<y<1$

$y=0,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1<u<1,\ v=0$

$y=1,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\sin x\cosh 1,\ v=\sinh 1\cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$x=\frac{\pi}{2},\ 0<y<1 \Rightarrow 1<u<\cosh 1,\ v=0$

$x=-\frac{\pi}{2},\ 0<y<1 \Rightarrow -1<u<-\cosh 1,\ v=0$



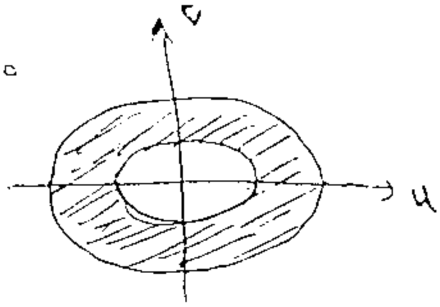
c) $0<x<2\pi \qquad 1<y<2$

$y=1,\ 0<x<2\pi \Rightarrow u=\sin x\cosh 1,\ v=\sinh 1\cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1}+\frac{v^2}{\sinh^2 1}=1$

$y=2,\ 0<x<2\pi \Rightarrow u=\sin x\cosh 2,\ v=\sinh 2\cos x \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 2}+\frac{v^2}{\sinh^2 2}=1$

$x=0,\ 1<y<2 \Rightarrow u=0,\ \sinh 1<v<\sinh 2$

$x=2\pi,\ 1<y<2 \Rightarrow \sinh 1<v<\sinh 2,\ u=0$



۱۴- نشان دهید که $w = \sin z$ خط $x = c$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ را بطور یک به یک بروی شاخه‌ی سمت راست هذلولی می‌نگارد.

* اثبات:

$u = \sin x \cosh y \qquad v = \cos x \sinh y$

$x = c \Rightarrow u = \sin c \cosh y$ و $v = \cos c \sinh y$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

چون $\sin c > 0$ و $\cosh y > 0$ پس $u > 0$ و خط $x = c$ بروی شاخه‌ی سمت راست نگاشته میشود

۱۵- نشان دهید تحت تبدیل $w = \sin z$ نیم نوار ناحیه $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $0 \leqslant y \leqslant 1$ با محدوده $A'D'$ و $A'E'$ و منحنی $E'D'$ است که در آن $E'D'$ قسمتی از یک بیضی است.

$u = \sin x \cosh y \; ; \qquad v = \cos x \sinh y$

خط $y = 0 \Rightarrow u = \sin x$, $v = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 , \; v = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \quad v = 0 \end{cases}$$

خط $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $v = \sinh y$

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow u = 0 , \; v = 0 \\ y = 1 \Rightarrow u = 0 , \; v = \sinh 1 \end{cases}$$

خط $y = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad v = \sinh 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \cosh 1 \quad v = 0 \end{cases}$$

که در بیضای یعنی بیضی است صادقند

۱۴- نشان دهید نگاشت $w = \cosh z$ پاره خط $z = iy$ $(0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ را به روی پاره خط $0 \leq u \leq 1$ و $v = 0$ می نگارد.

* جواب:

$$w = \cosh z = \cosh iy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

$$w = \cos y + i0 \Rightarrow u = \cos y \quad , v = 0$$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$

---

* صورت درست سؤال بدین ترتیب است:

۱۷ـ نشان دهید که تبدیل $w=\sin^2 z$ ناحیه‌ی $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $y \leqslant 0$ را به روی ناحیه‌ی $v \leqslant 0$ می‌نگارد.

* این نگاشت را به ترتیب در دو نگاشت متوالی می‌گیریم:

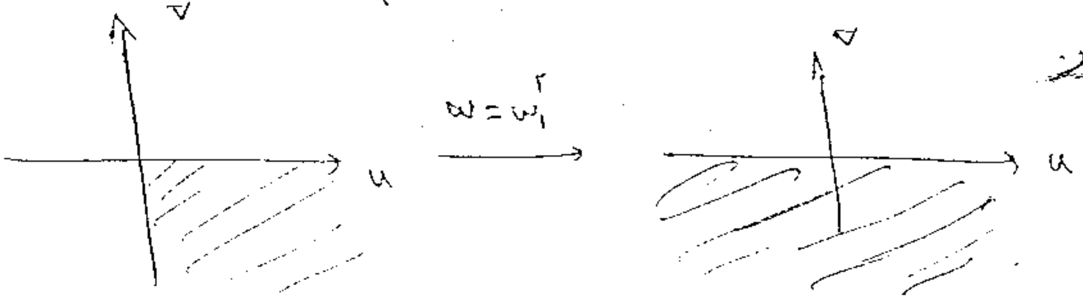
$w_1=\sin z \quad , \quad w_2=w_1^2$

$$\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ y \leqslant 0 \end{matrix} \Rightarrow w_1=\sin z \Rightarrow \begin{matrix} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ y \leqslant 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sin x \geqslant 0 \\ \cosh y > 0 \end{matrix} \Rightarrow u \geqslant 0 \quad و \quad v \leqslant 0$$

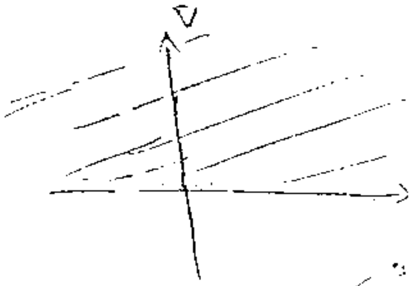
$$0 < x=c < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{w_1=\sin z} \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

هذلولی‌هایی با مجانب $v=\pm\cot c\,u$ که تمامی ناحیه‌ی $\begin{matrix} u\geqslant 0 \\ v\leqslant 0 \end{matrix}$ را می‌پوشانند درنتیجه $w=w_1^2$ زاویه ۲ برابر می‌شوند



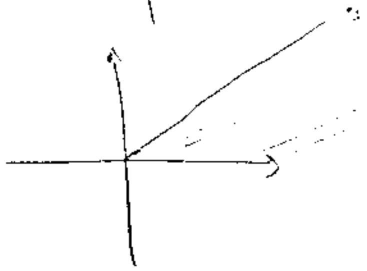
۱۸ـ نشان دهید که تحت تبدیل $w=(\sin z)^{\frac{1}{4}}$ نوار نیمه متناهی $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $y \geqslant 0$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ واقع است نگاشته می‌شود، کرانه‌اش را مشخص کنید.

$w_1=\sin z \quad و \quad w_2=w=w_1^{\frac{1}{4}}$



$$\begin{matrix} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{matrix} \xrightarrow[y\geqslant 0]{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}} \begin{matrix} -\infty < u < +\infty \\ v \geqslant 0 \end{matrix}$$

$$w=w_1^{\frac{1}{4}} \rightarrow \theta \rightarrow \theta/4$$



۱۹- نقش هر یک از نواحی زیر را با تبدیل $w = \cos z$ بیابید.

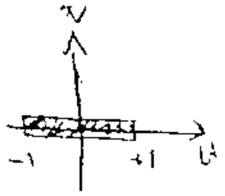
a) $y \geqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = u + iv$$

$y \geqslant 0 \Rightarrow \cosh y \geqslant 1 \quad , \sinh y \geqslant 0$

$0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$u = \cos x \cosh y$ $\qquad$ if $y = 0 \Rightarrow u = \cos x \ , \ v = 0 \Rightarrow$



$v = \sin y \sinh y$ $\qquad$ if $y \neq 0 \Rightarrow y = c > 0 \Rightarrow u = \cos x \cosh c$

$v = \sin x \sinh c$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

* نقش حاصل یک بیضی از خروج از مرکز $e = \frac{1}{\cosh c}$ است که با افزایش c کوچک شده و به خط متمایل می شود.

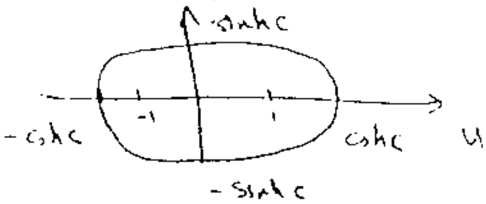
b) $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

$$\begin{matrix} u = \cos x \cosh y \\ v = \sin x \sinh y \end{matrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant 1]{y = c} \frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

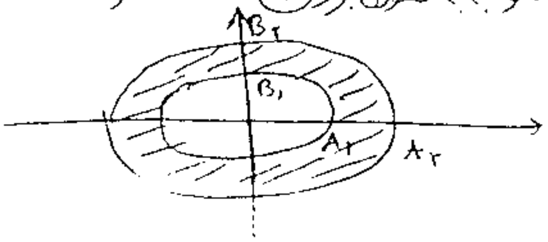
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{\cosh c}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant 1 \Rightarrow \cosh\frac{1}{2} \leqslant \cosh c \leqslant \cosh 1 \Rightarrow \cosh 1 \leqslant \frac{1}{\cosh c} \leqslant \cosh\frac{1}{2}$$

$$\forall c \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$



با توجه به صعودی بودن $\sinh x$, $\cosh x$ داریم



$A_1 = \left| \begin{matrix} \cosh\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad B_1 = \left| \begin{matrix} \sinh\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right.$

$A_2 = \left| \begin{matrix} \cosh 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad B_2 = \left| \begin{matrix} \sinh 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

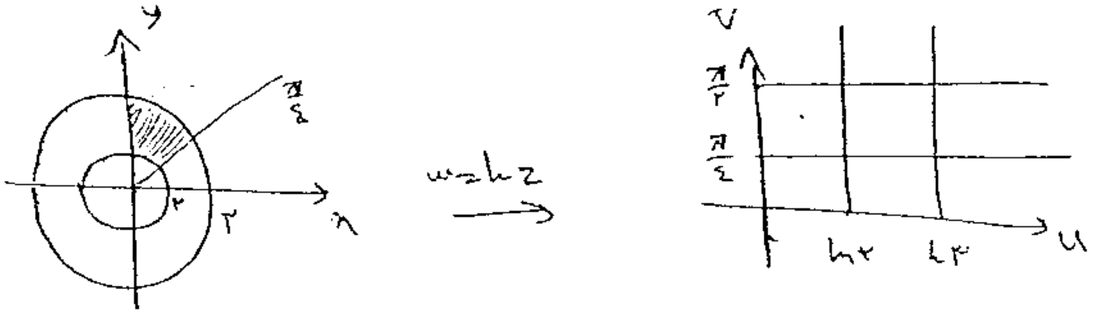
۲۰- نقش ناحیه ی $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $2 \leq |z| \leq 3$ را با تبدیل $w = \ln z$ بیابید

* جواب: شاخه اصلی $\ln$ $\quad w = \ln z = \ln|z| + i\theta$

$$2 \leq |z| \leq 3 \Rightarrow \ln 2 \leq \ln|z| \leq \ln 3$$

$$\ln 2 \leq u \leq \ln 3$$

$$v = \theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



۲۱- با استفاده از صورت قطبی z نشان دهید که تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ هر دو نیم بالائی و پائینی دایره $|z|=1$ را به روی پاره خط $-2 \leq u \leq 2$ و $v = 0$ می نگارد.

* جواب: نقاط دایره $|z|=1$ را با: $z = e^{i\theta}$

$$w = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = 2\cos\theta = u + iv$$

$$v = 0$$

$$u = 2\cos\theta \Rightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1 \Rightarrow -2 \leq u \leq 2$$

۲۰ـ نشان دهید

a) $\cos\bar{z} = \overline{\cos z}$

$\cos\bar{z} = \cos(x - iy) = \cos x \cos iy + \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$

$\overline{\cos z} = \overline{w}$, $w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\overline{w} = \overline{\cos z} = \cosh y \cos x + i \sin x \sinh y = \cos\bar{z}$

$\sin\bar{z} = \overline{\sin z}$ $\qquad \sin\bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$

$= \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} = \overline{\sin z}$

b) $|\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$

$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \leqslant \cosh^2 y \cos^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y$

$\leqslant \cosh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cosh^2 y$ ($\sinh y \leqslant \cosh y$ همواره)

$|\cos z| \leqslant |\cosh y| = \cosh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \geqslant \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = si$

$|\cos z| \geqslant \sinh y \Rightarrow |\sinh y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$

c) $|\cosh z| \leqslant \cosh x$

$|\cosh z| = \frac{1}{2}|e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}| \leqslant \frac{1}{2}|e^x e^{iy}| + \frac{1}{2}|e^{-x} e^{-iy}|$

$|e^{iy}| \leqslant 1 \Rightarrow |\cosh z| \leqslant \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \cosh x$

d) $\sin^{-1} z = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^۲})$

$\sin^{-1}z = w \Rightarrow z=\sin w = \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{۲i} = \dfrac{e^{۲iw}-1}{۲ie^{iw}}$

$e^{۲iw}-1 = ۲ize^{iw}$, $e^{iw}=a$

$a^۲-1=۲iza \Rightarrow a^۲-۲iaz-1=0$ $\quad a=iz\pm\sqrt{1-z^۲} \Rightarrow a=iz+\sqrt{1-z^۲}=e^{iw}$

چون e^{iw} مقدار لگاریتم تابع یک حرستانی لذا قرار منفی نادرست است.

$e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^۲}\Rightarrow iw=\ln(iz+\sqrt{1-z^۲})\Rightarrow w=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^۲})$

e) $\cos^{-1}z=w \Rightarrow z=\cos w = \dfrac{e^{۲iw}+1}{۲ie^{iw}}$

$e^{۲iw}+1-۲ze^{iw}=a^۲+1-۲za=0 \Rightarrow a= z\pm\sqrt{z^۲-1}=e^{iw}$

$\Rightarrow w=-i\ln(z+\sqrt{z^۲-1})$

f) $\cosh^{-1}z=w \Rightarrow z=\cosh w = \dfrac{e^{۲w}+1}{۲e^{w}}$

$a^۲+1-۲az=0 \Rightarrow a=z\pm\sqrt{z^۲-1}\Rightarrow w=\ln(z+\sqrt{z^۲-1})$

g) $\tan^{-1}z=w\Rightarrow z=\tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w} = \dfrac{(e^{iw}-e^{-iw})/۲i}{(e^{iw}+e^{-iw})/۲}$

$\Rightarrow z=\dfrac{1}{i}\dfrac{e^{۲iw}-1}{e^{۲iw}+1} = -i\dfrac{(e^{iw})^۲-1}{(e^{iw})^۲+1}\Rightarrow \dfrac{1-a^۲}{1+a^۲}=\dfrac{z}{i}=-iz$

$a^۲=\dfrac{1+iz}{1-iz}\Rightarrow a=\sqrt{\dfrac{1-z^۲}{1+z^۲}}=e^{iw}$

$iw=\ln\left(\dfrac{1-z^۲}{1+z^۲}\right)^{\frac{1}{۲}} = \dfrac{1}{۲}\ln\dfrac{1-z^۲}{1+z^۲}$ $\qquad$ *(کتاب اشتباه کرده)

۲۳ـ کلیه ریشه‌های معادله $\sin z = \cosh ٤$ را بیابید.

*حل مسئله:

$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x = \cosh ٤ + i0$

$\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{or} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۲} = (۲k+1)\frac{\pi}{۲} \end{cases}$

$\sin x . \cosh y = \cosh ٤$

$\text{if } y = 0 \Rightarrow \sin x = \cosh ٤ \quad \times \quad \Rightarrow y \neq 0$

$\text{if } x = (۲k+1)\frac{\pi}{۲}$, فرد k $\Rightarrow -\cosh y = \cosh ٤ \quad \times$

$\text{if } x = (۲k+1)\frac{\pi}{۲}$, زوج k $\Rightarrow \cosh y = \cosh ٤$

با توجه به زوج بودن $\cosh y$ داریم:

$y = -٤, ٤ \Rightarrow \begin{cases} x = (۲k+1)\frac{\pi}{۲} , \text{ زوج } k \\ y = -٤, ٤ \end{cases}$

۲۴ـ کلیه ریشه‌های معادله $\cos z = ۲$ را بیابید.

$.\cos z = ۲ \qquad \cos(x+iy$

*حل:

$\cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh x + i \sin x \sinh y = ۲$

$\sin x \sinh y = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \quad Ⓘ \\ \sinh y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow \cos x = ۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

$\cos x \cosh y = ۲$

$Ⓘ \longrightarrow \quad x = ۲n\pi \longrightarrow \cosh y = -۲ \quad \text{غ ق ق}$

$x = (۲n-1)\pi \longrightarrow \cosh y = ۲ \quad y = \cosh^{-1} ۲$

$\left.\begin{matrix} x = (۲n-1)\pi \\ y = \cosh^{-1} ۲ \end{matrix}\right\} \leftarrow$ مجموعه جواب به صورت

۲۵ـ نشان دهید $\overline{\cos(iz)} = \cos(\overline{iz})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i$.

* جواب

① $\cos iz = \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix) = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

② $\cos iz = \cos(-y+ix) = \cos(-y-ix) = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$

از ① و ② مسئله فوق حاصل می‌شود.

* نکته: $\cosh x$, $\cos x$ توابعی زوج و $\sin x$, $\sinh x$ توابعی فرد هستند.

۲۶ـ کلیه ریشه‌های معادله $\sinh z = i$ را بیابید.

* جواب:

$\sinh z = i$

$\sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \sinh iy \cosh x = \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x = i$

$$\sinh x \cdot \cos y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{or} \\ y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\sin y \cdot \cosh x = 1$

if $x = 0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; زوج k

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ فرد k $\Rightarrow \cosh x = -1$ ✗

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, زوج k $\Rightarrow \cosh x = 1 \Rightarrow x = -1 , 1$

۲۷ـ ثابت کنید که اگر $z = re^{i\theta}$ ، $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $r > 0$

آنگاه $\ln z^2 = 2\ln z$

* جواب

$z^2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow -\pi < 2\theta < \pi$

شاخه اصلی

$\ln z^2 = \ln|z|^2 + i2\theta = 2(\ln|z| + i\theta) = 2\ln z$

* تحت نگاشت $w = z^2$ ناحیه $r > 0$ ، $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ تمامی صفحه مختلط را پوشش می‌دهد. حال اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد صفحه مختلط دوبار پوشیده می‌شود، z^2 ما را از حالت تابع بودن خارج می‌کند.

۲۸ـ نشان دهید تابع $\frac{\ln(z-i)}{z^2+i}$ همه جا بجز روی نیم خط $y=1$ و $x \leq 0$ تحلیلی است.

راه حل اول: شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن مشتق‌پذیر بودن است.

$z = x+iy \Rightarrow z-1 = x + i(y-1)$

$z^2 + i = (x^2 - y^2) + i(2xy+1)$

$\ln(z-i) = \ln(z-i) + i\tan^{-1}\frac{+y-1}{x} = [x^2+(y-1)^2]^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}\frac{y-1}{x}$

$\frac{\ln(z-i)}{z^2+i} = P(x,y) + iq(x,y)$ حال از شرایط کشی - ریمان استفاده می‌کنیم.

راه حل دوم: با فرض تحلیلی بودن مشتق می‌گیریم.

$f(z) = \frac{\ln(z-i)}{z^2+i}$, $f'(z) = \frac{z^2+i-2z(z-i)\ln(z-}{(z^2+i)^2}$

نقاطی که $f'(z)$ وجود ندارند:

1) if $y=1$, $x \leq 0 \Rightarrow z-i = x+i(y-1) = x$

آنوقت $\ln$ منفی خواهد بود پس در این نواحی $f'(z)$ موجود نیست و تحلیلی نمی‌باشد.

ادامه

۲) حال ریشه مخرج را بررسی می‌کنیم

$z^2+i = 0 \Rightarrow z^2 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow r = 1 , \theta = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

z_1 روی نیم خط مستقیم ! واقع است ولی z_2 واقع نیست پس تنها

$R^2 -$ [illegible]

۲۹- هریک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید

* حل :

a. $(1+i)^{i} \longrightarrow 1+i=\sqrt{۲}\,e^{i\frac{\pi}{۴}}$

$\longrightarrow \sqrt{۲}\,e^{-\frac{\pi}{۴}} = e^{i\ln\sqrt{۲}}\,e^{-\frac{\pi}{۴}} = e^{-\frac{\pi}{۴}}(\cos\ln\sqrt{۲}+i\sin\ln\sqrt{۲})$

b. $(1-i)^{۴i} \longrightarrow 1-i=\sqrt{۲}\,e^{-\frac{\pi}{۴}}$

$(1-i)^{۴i} = ۴^{i}e^{\pi} = e^{i\ln ۴}\,e^{\pi} = e^{\pi}(\cos\ln ۴+i\sin\ln ۴)$

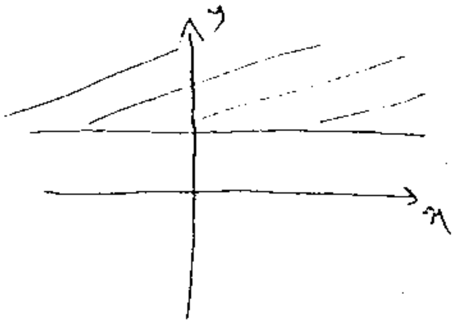
۳۰- نقش ناحیه $y>1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیابید.

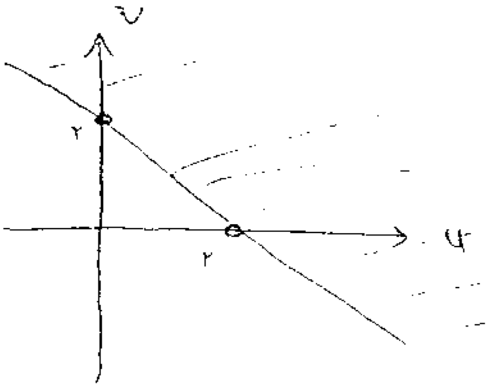
$w=(1-i)(x+iy)=x+y+i(-x+y)$

$u=x+y$

$v=-x+y$

$\rightarrow y=\frac{u+v}{۲} \xrightarrow{y>1} \frac{u+v}{۲}>1 \rightarrow u+v>۲$





۳۱ـ نقش هذلولی $x^2-y^2=1$ را با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

$$f(z)=w=\frac{1}{z} \rightarrow z=\frac{1}{w} \Rightarrow z=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$x^2-y^2=1 \quad : \quad u^2-v^2=(u^2+v^2)^2$$

۳۲ـ نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

* حل: تابع تبدیل هر تبدیل خطی به صورت $w=a_kz+b_k$ است که در آن a_k و b_k ها اعدادی مختلط باشند.

$$\begin{matrix} w_1=a_1z+b_1 \\ w_2=a_2z+b_2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب}} w=w_1+w_2=(a_1+b_1)z+b_1+b_2=az+b$$

تبدیل خطی

۳۴- تبدیل $w = \cosh z$ را برحسب نگاشتهای زیر بیان کنید.

$Z = e^{z}$, $w = \frac{۱}{۲}\left(Z + \frac{۱}{Z}\right)$

حل: $w = \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(e^{z} + \frac{۱}{e^{z}}\right)$

$= \frac{۱}{۲}\left(Z + \frac{۱}{Z}\right) = \frac{۱}{۲} W = \frac{W}{۲}$;

*۱- مطلوب است محاسبه $\int_c f(z)\,dz$ در آن

(a $f(z)=Re\,z$ ، C منحنی $y=x^2$ از $z=0$ ت $z=1+i$

*حل:

$$z=x+iy \qquad f(z)=Re\,z=x \Rightarrow u=x \quad y=0$$

$$y=x^2 \Rightarrow dy=2x\,dx$$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^1 x\,dx-0\times dy+i\int_0^1 x\,dy+0\times dx=$$

$$\int_0^1 x\,dx+i\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$$

(b $f(z)=|z|^2$ ، C دایره واحد.

*حل ،

$$f(z)=x^2+y^2 \qquad z=e^{i\theta} \qquad dz=ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_0^{2\pi} 1\times ie^{i\theta}\,d\theta=i\left[\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi}=\left[\frac{\overset{1}{e^{2\pi i}}-\overset{1}{e^{0i}}}{i}\right]i=0$$

(c $f(z)=\cos z$ روی خط راست از $1-i$ ت $1+i$

تابع تحلیلیست پس انتگرال مستقل از مسیر باشد.

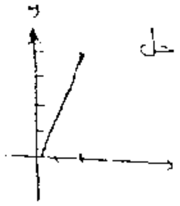
$$\int_{1-i}^{1+i}\cos z\,dz=\left[\sin z\right]_{1-i}^{1+i}=\sin(1+i)-\sin(1-i)$$

$$=\frac{e^{1+i}-e^{-1-i}-e^{1-i}+e^{i-1}}{2i}=\frac{e^{i}(e^{1}+e^{-1})}{2i}-\frac{e^{-i}(e^{1}+e^{-1})}{2i}$$

$$=(e^{-1}+e^{1})\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}\right)=2\sinh(1)\sin(1)$$

d) $f(z)=Im(z^{۲})$ از صفر تا $۲+۴i$ در طول پاره خط.

حل:



$$f(z)=Im(z^{۲})=Im[x^{۲}-y^{۲}+۲xyi]=۲xy$$

$u=۲xy \qquad v=0 \qquad y=۲x$ مسیر انتگرال‌گیری C $\Rightarrow dy=۲dx$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^{۲} ۲xy\,dx-0\,xdy+i\int_0^{۲} ۲xy\,dy+0\,xdx$$

$$=\int_0^{۲} ۴x^{۲}dx+i\int_0^{۲} ۸x^{۲}dx=\left[\frac{۴}{۳}x^{۳}\right]_0^{۲}+i\left[\frac{۸}{۳}x^{۳}\right]_0^{۲}=\frac{۳۲}{۳}+i\frac{۶۴}{۳}$$

۲- هرگاه $|f(z)|\leqslant M$ در منحنی C بطول L باشد آنگاه $\int_C f(z)\,dz\leqslant ML$

اثبات:

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{ش\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k$$

حال C را به n قسمت مساوی با طول $\frac{L}{n}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta z_k=\frac{L}{n} \qquad k=1,2,\dots,n$$

نامساوی مثلث

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\lim_{ش\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k\right|\leqslant \lim_{ش\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)|\,\Delta z_k$$

$$\Rightarrow \left|\int_C f(z)\,dz\right|\leqslant \lim_{ش\to 0}\sum_{k=1}^{n} M\frac{L}{n}=ML$$

۳- فرض کنید c قوسی از دایره‌ی $|z|=۲$ از $z=۲$ تا $z=۲i$ باشد که در ربع اول است آنگاه بدون آنکه انتگرال بگیرید نشان دهید

$$\left|\int_c \frac{dz}{z^۲+۱}\right| \leqslant \frac{\pi}{۳}$$

اثبات:

$$|z|=۲ \qquad z=۲e^{i\theta} \Rightarrow z^۲=۴e^{۲i\theta} \qquad z^۲+۱=۴e^{۲i\theta}+۱$$

ابتدا $|f(z)|$ را مشخص کنیم:

$$f(z)=\frac{۱}{z^۲+۱}$$

$$|f(z)|=\frac{۱}{|z^۲+۱|} \qquad |z^۲+۱|=|۱+۴e^{۲i\theta}|=|۱+۴\cos ۲\theta+i۴\sin ۲\theta|$$

$$=\left[(۱+۴\cos ۲\theta)^۲+(۴\sin ۲\theta)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}=\left[۱۷+۸\cos ۲\theta\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$۹\leqslant\left[۱۷+۸\cos ۲\theta\right]\leqslant ۲۵ \Rightarrow ۳<|z^۲+۱|<۵ \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۵}<\frac{۱}{|z^۲+۱|}<\frac{۱}{۳}$$

با توجه به سؤال قبل - سؤال دوم داریم:

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leqslant ML$$

طول L از $z=۲$ تا $z=۲i$ محیط ربع دایره یعنی $\frac{\pi}{۲}$ است.

$$\Rightarrow \left|\int_c \frac{dz}{z^۲+۱}\right| = \frac{۱}{۳}\times\frac{\pi}{۲}$$

* دوستان لطفاً توجه فرمایید در سؤال کتاب در جواب پایانی اشتباهاً $\frac{\pi}{۳}$ نوشته شده است *

۴- هرگاه c دایره $|z|=R>1$ باشد آنگاه نشان دهید:

$$\left|\oint_c \frac{\ln z}{z^2}\,dz\right| < 2\pi\,\frac{\pi+\ln R}{R}$$

اثبات: مانند سوال قبل داریم:

$$f(z)=\frac{\ln z}{z^2} \qquad z=Re^{i\theta} \qquad |f(z)|=\frac{|\ln z|}{|z^2|},\ \ln z=\ln R+i\theta$$

$$|f(z)|=\frac{\sqrt{\ln^2 R+\theta^2}}{R^2}$$

$$R>1 \Rightarrow \ln R>0 \Rightarrow \sqrt{\ln^2 R+\theta^2}\leqslant \theta+\ln R$$

$$|f(z)|\leqslant\frac{\theta+\ln R}{R^2}\leqslant\frac{2\pi+\ln R}{R^2}$$

$$\left|\oint_c f(z)\,dz\right|\leqslant ML=\frac{2\pi+\ln R}{R^2}\times 2\pi R=2\pi\,\frac{2\pi+\ln R}{R}$$

* ادامه‌ی سوال: اگر $R\to\infty$ آنگاه نشان دهید $\oint_c \frac{\ln z}{z^2}dz$ به سمت صفر میل کند.

$$\lim_{R\to\infty}\oint_c \frac{\ln z}{z^2}\,dz=0 \qquad \text{قضیه‌ی فشردگی را بدهد.}$$

د- داسا سوال ۵ ندارد.

۶- با نوشتن $\int_a^b dz$ برحسب انتگرال های توابع حقیقی نشان دهید که مقدار انتگرال برابر $b-a$ است.

* اثبات: a و b دو عدد مختلط باشند. $b = b_1 + b_2 i$ $a = a_1 + a_2 i$

$dz = dx + i dy$

$$\int_a^b dx + i dy = \int_a^b dx + i \int_a^b dy$$

* باید توجه داشت که a و b مختلط می‌باشند و dx و dy حقیقی و باید کران انتگرال را به کرانهای حقیقی تبدیل کرد.

$$\int_a^b dz = \int_{a_1}^{b_1} dx + i \int_{a_2}^{b_2} dy = b_1 - a_1 + i(b_2 - a_2) = b_1 + i b_2 - (a_1 + i a_2)$$

$$= b - a$$

۷-

۸- نشان دهید اگر $P(z) = a_0 + a_1 z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n \; ; \; a_n \neq 0$

یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد که $n \geq ۱$ آنگاه عدد مثبتی مثل R موجود است به طوری که به ازای هر z با $|z| > R$ داریم:

$$|P(z)| > \frac{|a_n||z|^n}{۲}$$

اثبات:

$$q(z) = \frac{a_n}{۲} z^n$$

فرض می‌کنیم: $\nexists R \ni |P(z)| > |q(z)| \Rightarrow |P(z)| < |q(z)| = \frac{a_n}{۲}|z|^n$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = H(z) + a_n z^n$$

$$\Rightarrow |H(z) + a_n z^n| < \frac{|a_n|}{۲}|z|^n$$

H(z) یک چندجمله‌ای است بر طبق قضیه اساسی جبر داریم: $\exists z_1 \in \mathbb{C} \ni H(z_1) = 0$

if $H(z_1) = 0 \Rightarrow |a_n||z|^n < \frac{|a_n|}{۲}|z|^n$ ✗

که تناقض است پس حتماً R ای وجود دارد.

۹- نشان دهید اگر f در درون و روی منحنی ساده بسته ی C تحلیلی باشد و z_0 روی C نباشد، آنگاه:

$$\int_c \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

* اثبات: مطابق قضیه ی انتگرال کشی اگر f در z_0 تحلیلی باشد آنگاه مشتق در آن نقطه تحلیلی است پس داریم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

تعریف مشتق را برای تابع تحلیلی $f'(z)$ در $z=z_0$ بکار می‌بریم.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} \qquad \text{Ⓘ}$$

از طرفی مطابق قضیه ی ۴ در صفحه ی ۲۰۵

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} \qquad \text{Ⓘ Ⓘ}$$

$$\text{Ⓘ},\ \text{Ⓘ Ⓘ} \Rightarrow \oint_c \frac{f'(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_c \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

۱۰- فرض کنید f در ناحیه ی بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیر ثابت باشد. با فرض اینکه در همه جا در R، $f(z)\neq 0$:

تابع $\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که $|f(z)|$ جایی در R دارای مقدار مینیمم N است و برای هر نقطه داخلی z داریم $|f(z)|>N$

* اثبات: چون $f(z)\neq 0$ آنگاه

$$\forall z\in R,\ f(z)\neq 0 \ ;\ g(z)=\frac{1}{f(z)} \ ,\ g'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$$

g(z) در تمامی نقاط R تحلیلی است از طرفی چون f(z) غیر ثابت است پس g(z) نیز غیر ثابت است. چون شرایط قضیه ی اصل ماکزیمم برای g(z) برقرار است پس:

$$\forall z\in R$$

$$\exists z_0 \in C_R \Rightarrow g(z_0) = \max g(z)$$

(C_R مرز کانتور)

$$g(z_0)=M \qquad |g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leqslant M \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leqslant M \Rightarrow |f(z)| \geqslant M = N$$

$$\forall z\in R \ :\ |f(z)| \geqslant N$$

تساوی در رابطه نامساوی ذکر شده فقط در مرز حاصل می‌شود ولی برای نقاط داخلی R

$$|f(z)| > N$$

(همان چیزی که در سوال مطرح شد.)

۱۱ - فرض کنید f تابع تامی باشد که به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leqslant A|z|$ که در آن A عددی ثابت و مثبت است. نشان دهید که یا به ازای هر z، $f(z)=0$ و یا به ازای هر z، $f(z)=a_1 z$ و $a_1 \neq 0$

* اثبات: ابتدا باید نشان بدهیم که اگر f و g در ناحیه همبند ساده در داخل D تحلیلی باشند و:

$$\text{if} \quad \forall z : \quad |f(z)| < |g(z)| \qquad \text{آنگاه} \rightarrow |f'(z_0)| < |g'(z_0)|$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

(z_0 روی مرز C نیست)*

$$|f(z)| < g(z) \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} < \frac{|g(z)|}{|(z-z_0)^2|} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{|f(z)|\,dz}{|(z-z_0)^2|} \leqslant \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{g(z)\,dz}{|(z-z_0)^2|}$$

$$f'(z_0) \leqslant g'(z_0)$$

حالا به سؤال برمی‌گردیم:

$$|f(z)| \leqslant A|z| = |Az|$$

$$|f'(z)| \leqslant |A| = A$$

چون f تام است پس f' نیز تام است، از طرفی نشان دادیم که $f'(z)$ کران دار است پس شرایط قضیه لیوویل برقرار شده. در نتیجه، نتیجه قضیه بر طبق لیوویل می‌شود یعنی:

$$f'(z) = c$$

$$\text{if} \quad c = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

$$\text{if} \quad c \neq 0 \Rightarrow f(z) = cz = a_1 z \ , \ a_1 \neq 0$$

* ۱۲۰- نشان دهید

a) $\frac{1}{z^۲} = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (n+۱)(z+۱)^n \quad ; |z+۱| < ۱$

$z_0 = -۱$

شرایط قضیه تیلور را دارد ⇐

$$\frac{1}{z^۲} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+۱)^n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad c_0 = \frac{f(-۱)}{0!} = ۱ \qquad c_۱ = \frac{f'(-۱)}{۱!} = ۲ \qquad c_۲ = \frac{f''(-۱)}{۲!} = ۳ \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^۲} = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (n+۱)(z+۱)^n$$

b) $\frac{1}{z^۲} = f(z) \qquad |z-۲| < ۲ \qquad z_0 = ۲$

بازهم شرایط قضیه تیلور را دارا است :

$$c_0 = \frac{f(۲)}{0!} = \frac{1}{۴} \qquad c_۱ = \frac{f'(۲)}{۱!} = \frac{\frac{-۲}{۸}}{۱!} = -\frac{۱}{۴}$$

$$c_۲ = \frac{f''(۲)}{۲!} = \frac{\frac{۶}{۲^۴}}{۲!} = \frac{۳}{۱۶} = \quad , \quad c_۳ = \frac{f'''(۲)}{۳!} = \frac{\frac{-۲۴}{۲^۵}}{۳!} = -\frac{۴}{۳۲}$$

$$\frac{1}{z^۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{(z-۲)^n}{۲^n} (n+۱)$$

c) $\frac{1}{۴z - z^۲} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-۱}}{۴^{n+۱}}$

$$\frac{1}{z(-z+۴)} = \frac{1}{z(۴-z)} = \frac{1}{۴z} \times \frac{1}{1-\frac{z}{۴}}$$

با توجه به بسط $\frac{1}{1-z}$ برای $\frac{1}{1-\frac{z}{۴}}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{1-\frac{z}{۴}} = ۱ + \frac{z}{۴} + \frac{z^۲}{۴^۲} + \cdots \quad Ⓘ$$

حال طرفین $\frac{1}{۴z}$ را در Ⓘ ضرب کنیم ⇐

$$\frac{1}{۴z - z^۲} = \frac{1}{۴z} + \frac{1}{۴^۲} + \frac{z}{۴^۳} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-۱}}{۴^{n+۱}}$$

۱٤- سری تیلور هر یک از توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید.

a) $f(z) = \cos z \quad ; \quad z = \frac{\pi}{2}$

$$f(z) = f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2})(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(z-\tfrac{\pi}{2})^2 + \cdots$$

$$= -(z-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(z-\tfrac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(z-\tfrac{\pi}{2})^5 + \cdots$$

b) $f(z) = \sinh z \quad ; \quad z = \pi i \qquad f'(z) = \cosh z \; , \; f''(z) = \sinh z$

$$f(z) = f(\pi i) + f'(\pi i)(z-\pi i) + \frac{f''(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$

$$= \sinh \pi i + \cosh \pi i\,(z-\pi i) + \frac{\sinh(\pi i)}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$

$$= i\sin\pi + \cos\pi\,(z-\pi i) + \frac{i\sin\pi}{2!}(z-\pi i)^2 + \cdots$$

$$= -(z-\pi i) - \frac{1}{3!}(z-\pi i)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi i)^5 - \cdots$$

c) $f(z) = z^5 \; , \; z = -1 \qquad f'(z) = 5z^4 \; , \; f''(z) = 20 z^3 \; , \; f'''(z) = 60 z^2 , \ldots , f^{(5)}(z) =$

$$f(z) = -1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + \cdots + 5!(z+1)^5 + 0 + \cdots$$

d) $f(z) = (z+1)^3 \qquad z = 2i \qquad f'(z) = 3(z+1)^2 \; , \ldots \; f'''(z) = 6 \; , \; \forall n \geq 4 : f^{(n)}(z) = 0$

$$f(z) = (1+2i)^3 + 3(1+2i)^2(z-2i) + 3(1+2i)(z-2i)^2 + 6(z-2i)^3 + 0 + 0 + \cdots$$

e) $f(z) = \sin z^2 \qquad z = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \Rightarrow \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots$$

f) $f(z) = \ln z \quad ; \quad z = 1 \qquad f'(z) = \frac{1}{z} \qquad f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \quad n = 1, 2, \ldots$

$$f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots$$

$$= (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \cdots$$

[illegible]

a) $f(z) = e^z \sin z$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum a_n z^n \quad , \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum b_n$$

$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$

if $\forall z : |z| < R \ : \ \sum a_n z^n \longrightarrow$ همگرا [illegible]

$\forall z : |z| < R \ : \ \sum b_n z^n \longrightarrow$ همگرا

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n \quad , \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$\Rightarrow c_0 = a_0 b_0 \quad , c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad , c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \ , \dots$

$$\underline{f(z)} = z + z^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) z^3 + \dots$$

b) $f(z) = z \cot z \qquad g(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \Big| \ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$-\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right) \dots \qquad \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) z^4 + \dots$$

$$-\left[\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^4 + \dots\right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)\right] z^4 + \dots$$

α

$$\cot z = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z + \alpha z^3 + \dots$$

$$z \cdot \cot z = 1 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \alpha z^4$$

c) $f(z) = z\sin z^2$

الگوی مثال ۱۵ مورد b :

$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + - \dots\dots$ و $z = 0 + 1z + 0z^2 + 0z^3 + \dots$

مطابق قضیه‌ی ضرب سری‌ها که در مورد a توضیح داده شده داریم :

$f(z) = z^3 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\dots$

※ ۱۶- هریک از توابع زیر را حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید .

a) $\frac{e^{2z}}{z^3}$: $e^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \dots$

$\Rightarrow \frac{e^{2z}}{z^3} = z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}z + \dots$

b) $z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \dots\right)$

$= z - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \dots$

c) $\frac{\sinh \pi z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(\pi z + \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} + \dots\right) = z^{-2}\pi + \frac{\pi}{3!} + \frac{\pi}{5!}z^2 + \dots$

d) $\frac{1}{z^2 + z^4} = \frac{1}{z^2(1+z^2)} = \frac{1}{z^2}\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \dots\right) \longrightarrow |z| < 1.$

$= z^{-2} - 1 + z^2 - z^4 + \dots \quad |z| < 1$

توجه شود سری‌ها در شعاع همگرایی آنها درست می‌باشد

e) $\frac{z-1}{z^2 - z^4} = \frac{-(z-1)}{z^2(z-1)(1+z)} = \frac{-1}{z^2(1+z)} = \frac{-1}{z^2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + - \dots\right)$

f) $z^3\cosh\frac{1}{z} = z^3\left(1 + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} + \dots\right) = z^3 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!}z^{-1} + \dots$

۱۷- بسط لوران هریک از توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

a) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$; $z_0=1$

ابتدا سری تیلور e^z را حول $z_0=1$ می‌نویسیم.

$$e^z = 1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$f(z)=(z-1)^{-2}e^z=(z-1)^{-2}+(z-1)^{-1}+\frac{1}{2!}(z-1)^0+\frac{(z-1)}{3!}+\cdots\cdots$$

b) $\frac{1}{z^2+1}$; $z_0=i$

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}=\frac{P(z)}{z-i} \quad , \quad P(z)=\frac{1}{z+i} \quad , \quad P^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{(z+i)^{n+1}}$$

$$\frac{P^n(i)}{n!}=\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \Rightarrow P(z)=\frac{1}{2i}+\frac{(z-i)}{2^2\times 1}+\frac{(z-i)^2}{2^3 i^3}+\frac{(z-i)^3}{2^4\times 1}+\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow P(z)=-\frac{i}{2}+\frac{(z-i)}{4}+\frac{i}{8}(z-i)^2+\frac{1}{16}(z-i)^4+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{P(z)}{z-i}=-\frac{i}{2}(z-i)^{-1}+\frac{1}{4}+\frac{i}{8}(z-i)+\frac{1}{6}(z-i)^2+\cdots\cdots$$

c) $\frac{z+i+1}{(z+i)^2}$; $z_0=-i$

چون $P(z)$ چندجمله‌ای است $P(z)=z+1+i$

پس سری تیلورش با خودش یکی است.

$$P(z)=1+(z+i)+0(z+i)^2+\cdots\cdots$$

$$(z+i)^{-2}P(z)=(z+i)^{-2}+(z+i)^{-1}+0+0+0+\cdots\cdots$$

d) $\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$; $z_0=\frac{\pi}{4}$

$$P(z)=\sin z=(z-\frac{\pi}{4})-\frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})^5}{5!}\cdots\cdots$$

$$f(z)=(z-\frac{\pi}{4})^{-3}P(z)=(z-\frac{\pi}{4})^{-2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}(z-\frac{\pi}{2})^2+\cdots\cdots$$

* ۱۸- با مشتق‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید

a) $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots \qquad \text{Ⓘ}$$

$$\left(\frac{1}{(1-z)}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$1+2z+3z^2+4z^3+\cdots$$ ← مشتق دست راست رابطه‌ی Ⓘ

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

b) $$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+4z^3+\cdots$$ کافیست از طرفین رابطه a مشتق بگیریم:

۱۹- با انتگرال‌گیری از سری مکلورن $\frac{1}{1+s}$ در امتداد مسیری از $s=0$ تا $s=z$ در داخل دایره همگرایی نشان دهید

$$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \;;\; |z|<1$$

$$\frac{1}{1+s} = 1-s+s^2-s^3+\cdots \qquad |s|<1$$

$$\int_0^z \frac{ds}{1+s} = \int_0^z (1-s+s^2-s^3+\cdots)\,ds$$

توجه: * هر سری توانی در داخل دایره همگرایی‌اش
آن را می‌توان جمله به جمله انتگرال یا مشتق گرفت

$$\ln(1+s)\Big]_0^z = \Big[s-\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{4}+\cdots\Big]_0^z$$

$$L(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} \;,\; |z|<1$$

۲۰. ثابت کنید: هرگاه $f(0)=1$ و برای $z\neq 0$، $f(z)=z^{-1}\ln(z+1)$ آنگاه f در سراسر حوزه $|z|<1$ تحلیلی است.

جواب: تابع $\ln(z+1)$ یک تابع تحلیلی در $|z|<1$ است پس داریم:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots\dots \quad ; \quad |z|<1$$

$$f(z)=z^{-1}(1+z)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\dots\dots+\frac{(-1)^n z^n}{n+1}+\dots\dots$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \quad , \quad a_n=\frac{(-1)^n z^n}{n+1}$$

حال از آزمون ریشه برای تعیین شعاع همگرایی استفاده می‌کنیم:

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{\sqrt[n]{n}}=\frac{|z|}{1}<1 \Rightarrow |z|<1$$

از طرفی می‌دانیم $f(z)$ را به صورت یک سری توانی با شعاع همگرایی معلوم نوشتیم و چون می‌دانیم یک سری توانی در حوزه همگرایی‌اش تحلیلی است پس $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی است.

۲۱. ثابت کنید: اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m)}(z_0)=0$ آنگاه تابع

$$g(z)=\begin{cases}\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}f(z) & ; \ z\neq z_0\\[2ex] \frac{1}{(m+1)}f^{(m+1)}(z_0) & ; \ z=z_0\end{cases}$$

در z_0 تحلیلی است.

* اثبات: اگر f در z_0 تحلیلی است پس داریم:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\dots+\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots\dots$$

$$f(z_0)=f'(z_0)=\dots\dots=f^{(m)}(z_0)=0$$

$$f(z)=\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^{m+2}+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots$$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}=\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m-1}+\dots$$

این تابع در همسایگی محذوف z_0 با $g(z)$ برابر است. همچنین در $z=z_0$ پیوسته است. چون $g(z)$ از تقسیم دو تابع تحلیلی حاصل شده است سری توانی و در نتیجه پس تحلیلی است.

* ۱۲- مطلوب است محاسبه‌ی مانده مربوط از توابع زیر در نقاط تکین آنها:

a) $\frac{1}{1-e^{z}}$ $\qquad z=0\,,2\pi i,4\pi i,6\pi i,\ldots$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{1-e^{z}}=\lim_{z\to 0}(z)\frac{1}{1-e^{z}}\overset{hop}{=\!=}\lim\frac{1}{-e^{z}}=-1$$

* برای تعیین نقاط تکین نیز می‌توان مقادیر مانده‌ها را حساب نمود

b) $\frac{z}{z^{4}-1}=\frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}$ $\qquad z=\pm i\,,\pm 1$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\cancel{(z-1)}\frac{z}{\cancel{(z-1)}(z+1)(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

برای تعیین نقاط قطبها هم به همین ترتیب عمل کنید.

c) $\frac{4-4z}{z^{2}(z+2)}$ $\qquad z=0,0\,,z=-2$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[f(z)\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d\left(\frac{4-4z}{z^{2}(z+2)}z^{2}\right)}{dz}=-2$$

* برای $z=-2$ به صورت مثال قبل مورد b عمل کنید.

d) $\frac{1}{(z^{4}-1)^{2}}$ $\qquad z^{4}=1 \qquad z=\pm 1\,,\pm i$ تمام ریشه‌ها دوبار تکراری شوند

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left[f(z)\right]=\lim\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-1)^{2}}\frac{1}{\cancel{(z-1)^{2}}(z+1)^{2}(z-i)^{2}(z+i)^{2}}\right)=\ldots$$

* برای تعیین درجه‌ی قطب‌ها ضرب صورت در توان عمل کنید.

e) $\frac{z+2}{(z+1)(z-4i)(z+4i)}$ $\qquad z=-1\,,4i,-4i$ نقاط تکین اند.

* مانند مسئله مورد b عمل کنید

f) $\frac{-z^{2}+8-12z}{z(z-1)(z-4)}$ $\qquad z=0\,,1,+4$

* مسئله‌ی مورد b

۲۳. مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر:

a) $\oint\limits_{|z|=1} z\cot z \, dz = 0$

چون طبق جواب سوال حل شده ها مشتق در $z\cot z$ تحلیلی است.

b) $\oint\limits_{|z|=1} \tan z \, dz = 0$ تحلیلی است

c) $\oint \frac{\sin \pi z}{z^{۴}} dz = ۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = ۲\pi i \, C_{-1}$

$\sin \pi z = z - \frac{z^{۳}}{۳!} + \frac{z^{۵}}{۵!} - \cdots$ $\qquad \frac{\sin \pi z}{z^{۴}} = z^{-۳} - \frac{z^{-1}}{۳!} + \frac{z}{۵!} - \cdots \Rightarrow C_{-1} = -\frac{1}{۶}$

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} f(z) = ۲\pi i \cdot \frac{-1}{۶} = \frac{-\pi i}{۳}$;

d) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+1}{z^{۴} - ۲z^{۳}} = ۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$

$z=0$ قطب مرتبه سوم است پس:

$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(۳-1)!} \lim\limits_{z\to 0} \frac{d^{۲}}{dz^{۲}} z^{۳} f(z)$

$= \frac{1}{۲} \lim\limits_{z\to 0} \frac{d^{۲}}{dz^{۲}} \left(\frac{z+1}{z-۲} \right) = \frac{1}{۲} \lim \frac{۶}{(z-۲)^{۳}} = -\frac{۳}{۸}$

$\oint\limits_{|z|=1} f(z) \, dz = ۲\pi i \cdot \frac{-۳}{۸} = -\frac{۳\pi i}{۴}$;

e) $$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^۴+۵z^۳+z^۲} = ۲\pi i \operatorname{Res}_{z=۰} f(z)$$

$$z^۴+۶z^۱+۵z^۳ = z^۲(z^۲+۵z+۶) = z^۲(z+۲)(z+۳) = ۰$$

$z=۰$ درون ناحیه است.

$$c_{-۱} = \lim \frac{d}{dz}\left(\cancel{z^۲} \frac{۱}{\cancel{z^۲}(z+۲)(z+۳)}\right) = \lim_{z\to ۰} \frac{d}{dz}\left(\frac{۱}{z^۲+۵z+۶}\right)$$

$$= \lim_{z\to ۰} \frac{-۲z+۵}{(z^۲+۵z+۶)^۲} = \frac{۵}{۳۶}$$

$$\oint f(z)\,dz = ۲\pi i \,\frac{۵}{۳۶} = \frac{۵\pi i}{۱۸} ;$$

f) $$\oint_{|z|=۱} \frac{۶z^۲-۴z+۱}{(z-۲)(۱+۴z^۲)}\,dz$$

$$۱+۴z^۲=۰ \Rightarrow z^۲ = i^۲\,\frac{۱}{۴} \qquad z = \pm\frac{i}{۲} ;$$

$$\oint f(z)\,dz = ۲\pi i\left[\operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{۲}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\frac{i}{۲}} f(z)\right]$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i}{۲}} f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{۲}} \left(z-\frac{i}{۲}\right) \frac{۶z^۲-۴z-۱}{۴(z-۲)(z-\frac{i}{۲})(z+\frac{i}{۲})} = \frac{-\frac{۳}{۲}-۲i+۱}{۴i\left(-۲+\frac{i}{۲}\right)} = \alpha$$

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{۲}} f(z) = \lim \left(z+\frac{i}{۲}\right) \frac{۶z^۲-۴z-۱}{۴(z-۲)(z-\frac{i}{۲})(z+\frac{i}{۲})} = \frac{۱+۲i-\frac{۳}{۲}}{۴i\left(۲+\frac{i}{۲}\right)} = \beta$$

$$\oint_{|z|=۱} f(z)\,dz = ۲\pi i\,(\alpha+\beta)$$

g) $\oint_{|z|=۱} \frac{z^{۲}-۳z^{۳}+۱}{(۲z+۱)(z^{۲}+۴)} = \oint_C \frac{f(z)}{۲z+۱}dz = \frac{۱}{۲}\oint_C \frac{f(z)}{z+۱/۲}dz = \frac{۱}{۲}۲\pi i \lim_{z\to -۱/۲} f(z) =$

$= \pi i \lim \frac{z^{۲}-۳z^{۳}+۱}{z^{۲}+۴} = \pi i \cdot \frac{۱/۴+۳/۸+۱}{۴+۱/۴} = ۸i/۵$

h) $\oint_{|z|=۱} \frac{e^{(z-i)\pi/۲}}{\sin z} dz = \oint_C f(z)dz = ۲\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = ۲\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{(z-i)\pi/۲}}{\cos z}$

$= ۲\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi/۲}}{۱} = -۲\pi i$

* اگر $f(Z)=\frac{p(Z)}{q(Z)}$ ، $p(Z_0)=0$, $q(Z_0)=0$ آنگاه :

$\operatorname{Res} f(Z) = \lim (Z-Z_0) f(Z) = \lim_{Z\to Z_0} \frac{(Z-Z_0)p(Z)}{q(Z)} = \lim_{Z\to Z_0} \frac{p(Z)}{\frac{q(Z)-0}{Z-Z_0}}$

$= \lim_{Z\to Z_0} \frac{p(Z)}{\frac{q(Z)-q(Z_0)}{Z-Z_0}} = \frac{p(Z_0)}{q'(Z_0)}$

i) $\int_{|z|=۱} \frac{\cosh z}{z^2-۲iz} dz = \oint_C \frac{(\cosh z)/z^2-۲i}{z} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z} dz$

$= ۲\pi i \lim z \cdot \frac{f(z)}{z} = ۲\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z}{z^{۲}-۲i} = ۲\pi i \cdot \frac{۱}{-۲i} = \frac{-۲\pi}{۲}$

j) $\int_{|z|=۱} \frac{۳۰z^{۲}-۲۳z+۵}{(۲z-۱)^{۲}(۳z-۱)} dz = ۲\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=۱/۲} f(z) + \operatorname{Res}_{z=۱/۳} f(z)\right]$

$\operatorname{Res}_{z=۱/۲} f(z) = \lim_{z\to \frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۴}\frac{d}{dz}(z-۱/۲)^{۲} \cdot \frac{۳۰z^{۲}-۲۳z+۵}{(۳z-۱)(z-\frac{۱}{۲})^{۲}} =$

$\frac{۱}{۴}\lim \frac{d}{dz} \frac{۳۰z^{۲}-۲۳z+۵}{۳z-۱} = \frac{۱}{۴}\lim_{z\to ۱/۲} p(z) \Big| = \frac{۱}{۴} p(\frac{۱}{۲})$

$\operatorname{Res}_{z=۱/۳} f(z) = \frac{۱}{۳}\lim_{z\to ۱/۳} \frac{۳۰z^{۲}-۲۳z+۵}{(۲z-۱)^{۲}} = ۱/۳ \lim_{z\to ۱/۳} q(z) = ۱/۳\, q(۱/۳)$

$\oint_C f(z)dz = ۲\pi i \left[\frac{۱}{۴}p(۱/۲) + ۱/۳\, q(۱/۳)\right]$

K) $\oint_{|z|=۱} \frac{\cosh z}{z(z^{۲}+۱)} dz = ۲\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = ۲\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z}{۱+z^{۲}} = ۲\pi i$

L) $\oint_{|z|=۱} \frac{e^{z^{۲}}\cosh z}{\cos z/۲} dz = 0$

m) $\oint_{|z|=۲} \frac{-z^۲-۲۲z+۸}{z^۳-۵z^۲+۴z}dz \quad z(z^۲-۵z+۴)=z(z-۱)(z-۴)=۰$

$$I=\oint_C f(z)dz=۲\pi i\left[\underset{z=۰}{\mathrm{Res}}\,f(z)+\underset{z=۱}{\mathrm{Res}}\,f(z)\right]$$

$$\underset{z=۰}{\mathrm{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to ۰}\frac{-z^۲-۲۲z+۸}{۳z^۲-۱۰z+۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$\underset{z=۱}{\mathrm{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to ۱}\frac{-z^۲-۲۲z+۸}{۳z^۲-۱۰z+۴}=\frac{-۱-۲۲+۸}{-۳}=۵ \qquad I=۱۴\pi i$$

---

*۲۴) مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال های زیر

a) $\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{۲+\cos\theta} \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right) \qquad d\theta=\frac{dz}{iz}$

$$I=\oint_{|z|=۱}\frac{dz}{iz\left(۲+\frac{z}{۲}+\frac{۱}{۲z}\right)}=\oint\frac{۲dz}{۴iz+iz^۲+i}$$

$z_۱=\frac{-۴i+i\sqrt{۱۲}}{۲i} \qquad z_۲=\frac{-۴i-i\sqrt{۱۲}}{}$

$z_۱=\frac{\sqrt{۱۲}-۴}{۲}=\sqrt{۳}-۲ \qquad z_۲=-۲-\sqrt{۳}$

در دایره یکه قرار دارد — در دایره قرار ندارد

$$I=۲\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{۱}{z+۲+\sqrt{۳}}\right]=۲\pi i\lim_{z\to\sqrt{۳}-۲}\frac{۱}{z+۲+\sqrt{۳}}=۲\pi i\times\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

---

b) $=\int_۰^{\pi}\frac{d\theta}{۱+\frac{۱}{3}\cos\theta}=\oint_{|z|=۱}\frac{\frac{dz}{iz}}{۱+\frac{z^۲+۱}{۶z}}=-۶i\oint_{|z|=۱}\frac{dz}{z^۲+۶z+۱}$

$$=(-۶i)(۲\pi i)\underset{z=-۳+۲\sqrt{۲}}{\mathrm{Res}}\,f(z)=۱۲\pi\lim_{z\to -۳+۲\sqrt{۲}}\frac{۱}{۲z+۶}=۱۲\pi\,\alpha$$

page 5

c) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos x}{۱۷-۸\cos x}\,dx \Rightarrow \quad I = \oint_{|z|=۱} \frac{\frac{۱}{۲}(z+\frac{۱}{z})}{۱۷-\frac{۸}{۲}(z+\frac{۱}{z})}\,\frac{dz}{iz}$

$= \oint \frac{\frac{۱}{۲}(z^{۲}+۱)}{iz(۱۷z-۴z^{۲}-۴)}\,dz \qquad z=۰$

$z_{۱} = \frac{-۱۷+\sqrt{۱۵}}{-۸} = ۱٫۶۴ \qquad z_{۲} = \frac{-۱۷-\sqrt{۱۵}}{-۸} = ۲٫۶$

$I = ۲\pi i \underset{z=۰}{\operatorname{Res}}[f(z)] = ۲\pi i \lim \frac{\frac{۱}{۲}(z^{۲}+۱)}{۱۷z-۴z^{۲}-۴} \times \frac{۱}{i} = \frac{\frac{۱}{۲}}{-۴} \times \frac{۱}{\cancel{i}}$

$\times ۲\pi \cancel{i} = \pi/۴$

---

d) $I = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos\theta}{۱۳-۱۲\cos ۲\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=۱} \frac{\frac{۱}{۲}(z+\frac{۱}{z})}{۱۳-۱۲\times\frac{۱}{۲}(z^{۲}+\frac{۱}{z^{۲}})} \times \frac{dz}{iz}$

$\oint_{|z|=۱} \frac{z^{۲}+۱}{۲z^{۲}(۱۳-۶z^{۲}-\frac{۶}{z^{۲}})} \times \frac{dz}{i} \qquad z=۰$ ریشه مضاعف

$\oint \frac{z^{۴}+z^{۲}}{i۲z^{۲}(۱۳z^{۲}-۶z^{۴}-۶)} = \oint \frac{z^{۴}+z^{۲}}{i۲(۱۳z^{۲}-۶z^{۴}-۶)z^{۲}}\,dz$

$z^{۲}=۱٫۵ \qquad z=\pm\sqrt{۱٫۵} \qquad z^{۲}=۲/۳ \qquad z=\pm\sqrt{۲/۳}$

$I = \oint \frac{z^{۴}+z^{۲}}{۲z^{۲}i(z-\sqrt{۱٫۵})(z+\sqrt{۱٫۵})(z-\sqrt{۲/۳})(z+\sqrt{۲/۳})}\,dz =$

$۲\pi i \sum_{z=\sqrt{۱٫۵},\,-\sqrt{۱٫۵},\,-\sqrt{\frac{۲}{۳}},\,\sqrt{\frac{۲}{۳}},\,۰} \operatorname{Res}[f(z)]$

---

e) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos\theta}{۳+\cos\theta}\,d\theta$

$$\int_{|z|=۱} \frac{\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right)}{۳+\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=۱} \frac{z^{۲}+۱}{iz\left(z^{۲}+۶z+۱\right)}\,dz$$

$z_۱ = ۰$ داخل دایره است $\qquad z_۲ = -۰/۰۸۵$ داخل دایره است $\qquad z_۳ = -۲/۹۱$

بیرون دایره

$$I = ۲\pi i \sum_{z=۰\,,\,-۰/۰۸۵} \operatorname{Res}\left[F(z)\right]$$

$$f)\quad I = \int_۰^{۲\pi} \frac{\sin^{۲}\theta}{۵-۴\cos۲\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=۱} \frac{\frac{۱}{۴i^{۲}}\left(z-\frac{۱}{z}\right)^{۲}}{۵-۴\left[\frac{۱}{۲}\left(z^{۲}+\frac{۱}{z^{۲}}\right)\right]}\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{-\frac{۱}{۴}\left(z^{۲}-۲+\frac{۱}{z^{۲}}\right)}{۵z-۲z^{۳}-\frac{۲}{z}} = \oint \frac{-\frac{۱}{۴}\left(z^{۴}-۲z^{۲}+۱\right)}{\left(۵z^{۳}-۲z^{۵}-۲z\right)}\frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{-۱/۴\left(z^{۲}-۱\right)^{۲}}{z\left(۵z^{۲}-۲z^{۴}-۲\right)}\frac{dz}{i}$$

$$I = ۲\pi i\left[\lim_{z\to ۱/۲}\frac{-۱/۴\left(z^{۲}-۱\right)^{۲}}{z(z-۲)} + \lim_{z\to ۲}\frac{-۱/۴\left(z^{۲}-۱\right)^{۲}}{z(z-۱/۲)} + \lim_{z\to ۰}\frac{-۱/۴\left(z^{۲}-۱\right)^{۲}}{(z-۱/۲)(z-۲)}\right.$$

$$g)\quad I = \int_۰^{۲\pi} \frac{\cos^{۲}\theta}{۲۶-۱۰\cos۲\theta}\,d\theta = \oint \frac{۱/۲\left(z+۱/z\right)^{۲}}{۲۶-۱۰\left(۱/۲\left(z^{۲}+\frac{۱}{z^{۲}}\right)\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{۱/۲\left(z^{۲}+۱\right)^{۲}\,dz}{i\left(۲۶z^{۳}-۵z^{۵}-۵z\right)} = \oint \frac{۱/۲\left(z^{۲}+۱\right)^{۲}}{iz\left(۲۶z^{۲}-۵z^{۴}-۵\right)}\,dz$$

$$z^{۲} = \frac{-۲۶\pm ۲۴}{-۱۰} \begin{cases} \nearrow ۵ \\ \searrow ۰/۲ \end{cases}$$

$z_۵ = ۰ \qquad z_۴ = \sqrt{۰/۲} \qquad z_۳ = -\sqrt{۰/۲} \qquad z_۲ = -\sqrt{۵} \qquad z_۱ = \sqrt{۵}$

h) $I = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos^{۲} ۲\theta}{۵ - ۴\cos^{۲}\theta}\, d\theta$

$I = \oint_{|z|=۱} \frac{۱/۴\left(z^{۲} + \frac{۱}{z^{۲}}\right)^{۲}}{\left(۵ - ۴ \times \frac{۱}{۲}\left(z^{۲} + \frac{۱}{z^{۲}}\right)\right)} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{۱/۴\,(z^{۴}+۱)^{۲}}{z^{۷}\left(۵ - ۲z^{۲} - \frac{۲}{z^{۲}}\right)} \frac{dz}{i}$

$= \oint \frac{۱}{۴z^{۵} i} \cdot \frac{(z^{۴}+۱)^{۲}}{(۵z^{۲} - ۲z^{۴} - ۲)}\, dz$ $\quad z = ۰ \quad z_{۱} = 0 \quad z^{۲} = ۲ \quad z^{۲} = ۱/۲$

$z_{۲} = -\sqrt{۲} \quad z_{۳} = \sqrt{۲} \quad z_{۴} = -\sqrt{۱/۲} \quad z_{۵} = \sqrt{۱/۲}$

$I = ۲\pi i \left[\lim_{z \to -\sqrt{۲}} \frac{(z^{۴}+۱)^{۲}}{۴z^{۵} i (z - \sqrt{۲})(z + \sqrt{۱/۲})(z - \sqrt{۱/2})} + \lim z^{۴}+۱ \ldots\ldots \right.$

---

j) $I = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos\theta}{۴ + \frac{۴}{۳}\sin ۲\theta}\, d\theta \qquad \cos\theta = ۱/۲\left(z + \frac{۱}{z}\right)$

$\sin ۲\theta = \frac{۱}{۲i}\left(z^{۲} - \frac{۱}{z^{۲}}\right) \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$

$I = \oint_{|z|=۱} \frac{۱/۲\,(z + ۱/z)}{۴ + \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۲i}\left(z^{۲} - \frac{۱}{z^{۲}}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{۱/۲\,(z^{۲}+۱)}{i\left(۴z^{۲} + \frac{۲}{۳i} z^{۴} - \frac{۲}{۳i}\right)}\, dz$

$= \oint \frac{۳/۲\,(z^{۲}+۱)}{۲z^{۴} + ۱۲iz^{۲} - ۲} \qquad z^{۲} = \frac{-۱۲i \pm ۱۱{,}۳۱i}{۴}$

$z^{۲} = -۲{,}۸۳i \qquad z^{۲} = -۰{,}۱۷i$

۳۵) نشان دهید که

a) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^{۲}\theta}=\pi\sqrt{۲}$$

$$1+\sin^{۲}\theta=1+\frac{1}{۲}-\frac{1}{۲}\cos۲\theta=\frac{۳}{۲}-\frac{1}{۲}\,\frac{1-\tan^{۲}\theta}{1+\tan^{۲}\theta}$$

$$=\frac{۳+۳\tan^{۲}\theta-1+\tan^{۲}\theta}{۲(1+\tan^{۲}\theta)}=\frac{۲+۴\tan^{۲}\theta}{۲(1+\tan^{۲}\theta)}=\frac{1+۲\tan^{۲}\theta}{1+\tan^{۲}\theta}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+\tan^{۲}\theta)\,d\theta}{1+(\sqrt{۲}\tan\theta)^{۲}}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1+۲u^{۲}}=\frac{1}{\sqrt{۲}}\tan^{-1}u+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{۲}}\tan^{-1}\theta\tan\theta+C=\frac{\theta}{\sqrt{۲}}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۲}}=\pi\sqrt{۲}$$

---

b) $$\int_{0}^{۲\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{۲\pi}{\sqrt{(1-a^{۲})}}\qquad -1<a<1$$

$$۲\cos x=z+\frac{1}{z}=\frac{z^{۲}+1}{z}\qquad z=e^{i\theta}\qquad dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$$

$$d\theta=\frac{dz}{iz}\quad\Rightarrow\quad\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{az^{۲}+۲z+a}{۲z}}=\frac{۲}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^{۲}+۲z+a}$$

$$az^{۲}+۲z+a=0\quad\Rightarrow\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^{۲}}}{a}$$

$$\oint_{|z|=1}f(z)\,dz=۲\pi i\,\mathrm{Res}\,f(z)$$

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-a^{۲}}}{a}=z_0$$

$$\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{۲az+۲}=\frac{1}{۲-۲+۲\sqrt{1-a^{۲}}}$$

$$\int\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{۲}{i}\times۲\pi i\times\frac{1}{۲\sqrt{1-a^{۲}}}=\frac{۲\pi}{\sqrt{1-a^{۲}}}$$

---

c) $$\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^{۲}}=\frac{\pi a}{(a^{۲}-1)^{۲}}\quad;\ a>1$$

$$\cos\theta=\frac{z}{۲}+\frac{1}{۲z}=\frac{z^{۲}+1}{۲z}\qquad a+\cos\theta=a+\frac{z^{۲}+1}{۲z}=\frac{z^{۲}+۲az+1}{۲z}$$

$$\int_{0}^{\pi}f(\theta)\,d\theta=\frac{۴}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^{۲}+۲az+1)^{۲}}=\Big(\frac{۴}{i}\sum_{|z|=1}\mathrm{Res}\,f(z)\Big)۲\pi i=۸\pi\,\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z)$$

$$z^{۲}+۲az+1=0\quad\Rightarrow\quad z=-۲a\pm\sqrt{۴a^{۲}-۴}\qquad z=-۲a\pm i\sqrt{a^{۲}-1}$$

دی ۱۳۸۰

قطب $z_0 = -۲a + ۲\sqrt{a^۲-۱}$ درداخل ناحیه $|z|=۱$ قرار دارد

$$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, F(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{d} (z-z_0)^۲ F(z)$$

با ضرب دوطرف نتیجه می‌گیریم که: $\int_0^\pi F(\theta)d\theta = \frac{\pi a}{(a^۲-۱)^{۳/۲}}$

---

d) $\int_0^\pi \sin^{۲n}\theta \, d\theta = \frac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^۲}\pi \quad ; \quad n=۱,۲,\ldots$

$(\sin^۲\theta)^n \Rightarrow \sin\theta = \left(\left(z-\frac{۱}{z}\right)\frac{۱}{۲i}\right)^۲ = -\frac{۱}{۴}\left(z^۲+\frac{۱}{z^۲}-۲\right) = \frac{-z^۴+۱+۲z^۲}{۴z^۲}$

$d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad \frac{(-z^۴+۲z^۲+۱)^n}{۴z^{۲n}}\frac{dz}{iz} = \frac{۱}{۴i}\cdot\frac{(-z^۴+۲z^۲+۱)^n}{z^{۲n+۱}}$

$\frac{۱}{۴i}\oint_{|z|=۱} \frac{(-z^۴+۲z^۲+۱)^n}{z^{۲n+۱}}dz = \frac{۱}{۴i}\cdot ۲\pi i \frac{d^{۲n}}{dz^{۲n}} z^{۲n+۱}\cdot\frac{(-z^۴+۲z^۲+۱)^n}{z^{۲n+۱}}$

$\frac{\pi}{۲}\lim_{z\to 0}\frac{d^{۲n}}{dz^{۲n}}\cdot(-z^۴+۲z^۲+۱) = \frac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^۲}\pi$ —.

---

*۳۶) مطلوب است محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^۴} = I \qquad I = ۲\pi i\sum \text{Res}\, F(z), \quad F(z) = \frac{۱}{۱+z^۴}$

$z^۴+۱=0 \quad z^۴ = e^{i\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{۲k\pi+\pi}{۴}} \, (\text{Im}\, z)>0$

$z_۱ = e^{i\pi/۴}, \quad z_۲ = e^{i\pi/۲} = i, \quad z_۳ = e^{i\frac{۵\pi}{۴}}$

این سه جواب قابل قبول هستند سه جواب در ناحیه $\text{Im}(z)<0$ واقع اند.

$\underset{z=z_۱}{\text{Res}}F(z) = \lim_{z\to z_۱}\frac{۱}{z^۵} = \frac{۱}{۴z_۱^۵} = \alpha$ حاصل می‌شود

$\underset{z=z_۲}{\text{Res}}F(z) = \lim_{z\to z_۲}\frac{۱}{۴z^۵} = \beta \qquad \underset{z=z_۳}{\text{Res}}F(z) = \frac{۱}{۴z_۳^۵} = \gamma$

$I = ۲\pi i(\alpha+\beta+\gamma)$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^۲-۲x+۲)^۲}dx = 2\pi i\sum_{Im(z)>۰} Res\, f(z)$$

$$f(z)=\frac{z}{(z^۲-۲z+۲)^۲} \qquad z^۲-۲z+۲=۰ \Rightarrow z=1\pm i$$

$(z^۲-۲z+۲)^۲=(z-1-i)^۲(z-1+i)^۲$ نقطه $z=1+i$ در $Im(z)>۰$ قرار دارد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=۲\pi i \underset{z=1+i}{Res} f(z) \qquad \underset{z=1+i}{Res} f(z)=\lim \frac{d}{dz}(z-1-i)^۲\cdot\frac{z}{(z-1-i)^۲(z-1-i}$$

$$=\lim_{z\to 1+i}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1+i)^۲}=\lim\frac{(z-1+i)-۲z}{(z-1+i)^۳}=\alpha \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=۲\pi i\alpha$$

---

c) $$\int_۰^{\infty}\frac{dx}{(1+x^۲)^۲}=\frac{1}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^۲)^۲}=\pi i\sum_{Im(z)>۰}Res\, f(z)$$

$$f(z)=\frac{1}{(1+z^۲)^۲}=\frac{1}{((z-i)(z+i))^۲}=\frac{1}{(z-i)^۲(z+i)^۲}$$

$z=i$ قابل قبول: یک قطب مرتبه دوم است.

$$\int_۰^{\infty}f(x)dx=\pi i\underset{z=i}{Res}f(z)=\pi i\lim\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^۲}=-\pi i\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^۳}$$

$$=-\pi i\cdot\frac{1}{8i^3}=\pi/8$$

---

d) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^۲+1)(x^۲+۹)}=۲\pi i\sum_{Im(z)>۰}Res\, f(z) \qquad z^۲+1=۰ \quad z=\pm i$$

$$z^۲+۹=۰ \quad z=\pm ۳i$$

$$\Rightarrow z_0=i,\ z_1=3i \qquad \underset{z=i}{Res} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim\frac{1}{(z+i)(z^۲+۹)}$$

$$\underset{z=۲i}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to ۲i} \frac{1}{(z^{۲}+1)(z+۲i)} = \beta \qquad I = ۲\pi i\,(\alpha+\beta)$$

$$e)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^{۲}+1)(x^{۲}+۴)^{۲}} \Rightarrow 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$(z+1)^{۲}(z^{۲}+۴)^{۲} = (z-i)(z+i)(z-۲i)^{۲}(z+۲i)^{۲} \quad \underset{\text{قطب ساده}}{z_0=i}\ ,\ \underset{\text{قطب مرتبه دوم}}{z_1=۲i} \quad \text{نقاط تکین}$$

$$\underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim \frac{1}{(z+i)(z^{۲}+۴)^{۲}} = \alpha$$

$$\underset{z=۲i}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to ۲i} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z^{۲}+1)(z+۲i)} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = ۲\pi i(\alpha+\beta)$$

$$f)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^{۲}}{1+x^{۴}}\,dx = ۲\pi i \sum_{Im(z)>0} \operatorname{Res} f(z)$$

$$f(z) = \frac{1+z^{۲}}{1+z^{۴}}\ , \qquad 1+z^{۴}=0 \Rightarrow z = e^{-i\frac{۲k\pi+\pi}{۴}}\ , k=0,1,۲,\dots,۵$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{۴}}\ , \quad z_1 = i\ , \quad z_3 = e^{i\frac{۵\pi}{۴}}$$

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1+z^{۲}}{۴z^{۵}} = \frac{1+e^{i\pi/۲}}{۴e^{۵\pi/۴}} = \alpha$$

$$\underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim \frac{1+z^{۲}}{۴z^{۵}} = \frac{1+i^{۲}}{۴i^{۵}} = 0 \qquad \underset{z=z_3}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to z_3} \frac{1+z^{۲}}{۴z^{۵}} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = ۲\pi i\,(\alpha+0+\beta)$$

$$g)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{(x^{۲}+1)(x^{۲}+۴)} = \Big[۲\pi i \sum_{Im(z)>0}\operatorname{Res} f(z)e^{iz}\Big]$$

$$\int_c f(z)e^{iz}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)e^{iz}dz = ٢\pi i \sum_{Im(z)>٠} Res\, f(z)e^{iz} = ٢\pi i \sum_{Im(z)>٠} Res\, g(z)$$

$$g(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^٢+١)(z^٢+٤)} \quad , \quad z=\pm i \quad , \quad z=\pm ٢i$$

$$\underset{z=i}{Res}\, g(z) = \lim_{z\to i} \frac{ze^{iz}}{(z+i)(z^٢+٤)} = \alpha \quad , \quad \underset{z=٢i}{Res}\, g(z) = \lim_{z\to ٢i} \frac{ze^{iz}}{(z^٢+١)(z+٢i)} = \beta$$

$$\int_C f(z)e^{iz}dz = ٢\pi i(\alpha+\beta) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x \, dx}{(x^٢+١)(x^٢+٤)} = Im\left(٢\pi i(\alpha+\beta)\right)$$

$$h=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x+a)^{۲}+b^{۲}}=Re\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx=\int_{\substack{c\\ Im(z)>۰}}f(z)\,e^{iz}\,dz\implies\int\frac{e^{iz}\,dz}{(z+a)^{۲}+b^{۲}}=۲\pi i\underset{Im(z)>۰}{Res}\,g(z)$$

* تابع $(z+a)^{۲}+b^{۲}$ دارای دو ریشه است. $z_{۱}=-a-ib$ و $z_{۲}=-a+ib$ و

ما میدانیم در $Im(z)>۰$ نیست پس تابع $f(z)$ در $Im(z)>۰$ تحلیلی است.

$$\int_{Im(z)>۰}f(z)\,e^{iz}\,dz=۰\implies\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x+a)^{۲}+b^{۲}}=۰$$

$$i=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^{۲}+۹)^{۲}}=Re\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^{۲}+۹)^{۲}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{ix}\,dx=\int_{Im(z)>۰}f(z)\,e^{iz}\,dz$$

$$\int\frac{e^{iz}}{(z^{۲}+۹)^{۲}}\,dz=۲\pi i\sum_{Im(z)>۰}Res\;g(z)$$

$$z^{۲}+۹=۰\implies z=\pm۳i\implies z_{۰}=۳i$$

$$\underset{z=۳i}{Res}\,g(z)=\lim_{z\to۳i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+۳i)^{۲}}\right)=\text{باید از عبارت درون پرانتز مشتق گرفته و}=\alpha$$

بجای z ، $۳i$ قرار دهیم

$$\implies\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^{۲}+۹)^{۲}}=Re\,[۲\pi i\alpha]$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \quad dx}{x^۴ + ۱۳x^۲ + ۳۶} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^۴ + ۱۳x^۲ + ۳۶}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz$$

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = ۲\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\, g(z)$$

$$z^۴ + ۱۳z^۲ + ۳۶ = 0 \Rightarrow z^۲ = ۴i^۲ ,\ ۹i^۲ \Rightarrow z = \pm ۲i ,\ \pm ۳i$$

$$z_0 = ۲i ,\ z_1 = ۳i$$

$$\operatorname{Res}_{z=۲i} g(z) = \lim_{z\to ۲i} \frac{1}{۴z^۳ + ۲۶z} = \alpha$$

$$\operatorname{Res}_{z=۳i} g(z) = \lim_{z\to ۳i} \frac{1}{۴z^۳ + ۲۶z} = \beta$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\, dx = \operatorname{Re}\left[۲\pi i(\alpha + \beta)\right]$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^۴ + 1} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)\, e^{iz}\, dz = \int \frac{e^{iz}}{z^۴ + 1}\, dz$$

$$z^۴ + 1 = 0 \qquad z = e^{i\left(\frac{۲k\pi + \pi}{۴}\right)} \qquad z_0 = e^{i\frac{\pi}{۴}} ,\ z_1 = e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$$

$z_۲ , z_۳$ قابل قبول نیستند

$$\int f(z)\, e^{iz}\, dz = ۲\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\, g(z)$$

$$\left\{ \operatorname{Res}_{z=z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{e^{iz}}{۴z^۳} = \alpha ,\ \operatorname{Res}_{z=z_1} g(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{iz}}{۴z^۳} = \beta \right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\, dx = \operatorname{Re}\left[۲\pi i(\alpha + \beta)\right]$$

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ۲x}{۴x^۴+۱۳x^۲+۹}\,dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i۲x}\,dx=I$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{۲ix}\,dx=\int_{Im(z)>۰}f(z)\,e^{۲iz}\,dz=\int_{Im(z)>۰}g(z)\,dz$$

$$۴z^۴+۱۳z^۲+۹=۰\Rightarrow z^۲=-\frac{۱۳}{۲}\pm\frac{۵}{۲}i=r\,e^{\pm i\theta}$$

$$z^۲=r\,e^{i\theta}\Longrightarrow z_۰=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{۲}}\quad,z_۱=\sqrt{r}\,e^{۲\theta/۲}$$

$$z^۲=r\,e^{-i\theta}\Longrightarrow z_۲=\sqrt{r}\,e^{-i\theta/۲}\quad,z_۳=\sqrt{r}\,e^{-i۲\frac{\theta}{۲}}$$

تنها $z_۰$, $z_۱$ داخل مرزند.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname*{Res}_{z=z_۰}g(z)=\lim\limits_{z\to z_۰}\dfrac{1}{۱۶z^۳+۲۶z}=\alpha\\[2ex]\operatorname*{Res}_{z=z_۱}(g(z))=\lim\limits_{z\to z_۱}\dfrac{1}{۱۶z^۳+۲۶z}=\beta\end{array}\right\}\Rightarrow I=\mathrm{Re}[۲\pi i(\alpha+\beta)]$$

$$m=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ۴x}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}\,dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i۴x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i۴x}\,dx=\int_{Im(z)>۰}f(z)\,e^{i۴z}\,dz=\int_{Im(z)>۰}g(z)\,dz$$

$$(z^۲+۱)(z^۲+۴)=۰\Rightarrow\begin{array}{l}z_۰=i\\z_۱=۲i\end{array}$$ داخل مرزند

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname*{Res}_{z=۲i}g(z)=\lim\limits_{z\to ۲i}\dfrac{e^{i۴z}}{(z+۲i)(z^۲+۱)}=\beta\\[2ex]\operatorname*{Res}_{z=i}g(z)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{i۴z}}{(z+i)(z^۲+۴)}=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ۴x\,dx=\mathrm{Re}[۲\pi i(\alpha+\beta)]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2x}\,dx = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} f(z)\, e^{i2z}\,dz = \int_{\operatorname{Im}(z)>0} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\, g(z)$$

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

هیچ‌کدام از دو ریشه در ناحیه‌ی $\operatorname{Im}(z)>0$ قرار ندارند پس تابع $\frac{e^{i2z}}{z^2+z+1}$ در ناحیه‌ی $\operatorname{Im}(z)>0$

تحلیلی است در نتیجه طبق قضیه‌ی کوشی انتگرال آن در این ناحیه صفر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2x \,dx = 0$$