www.mohandesyar.com

بسمه تعالی

«تمرینات فصل اول»

۱- کدام یک از توابع داده شده در بازه‌های تعریف شده پیوسته تکه‌ای هستند.

a) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad 1<x<2 \end{cases}$

پیوسته تکه‌ای هست

b) $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -1<x\leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & ; \quad 0<x<1 \end{cases}$

چون در $x=0$ ناپیوستگی از نوع بی‌نهایت دارد پیوسته تکه‌ای نیست

c) $f(x)=\begin{cases} 2 & ; \quad 0\leqslant x<1 \\ x^2 & ; \quad 1<x<2 \end{cases}$

پیوسته تکه‌ای هست

d) $f(x)=\begin{cases} 1-x & ; \quad -1\leqslant x<2 \\ \frac{x}{2-x} & ; \quad 2<x\leqslant 3 \end{cases}$

چون در $x=2$ ناپیوستگی از نوع بی‌نهایت دارد پیوسته تکه‌ای نیست

۲- کدام یک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند. فرد $f(-x)=-f(x)$ زوج $f(x)=f(-x)$

---

a) $x+2x^2+3x^3$ $f(-x)=-x+2(-x)^2+3(-x)^3=-x+2x^2-3x^3$ نه زوج و نه فرد

$f(x)=x\ln x$ $f(-x)=(-x)\ln(-x)$ دامنه لگاریتم $(\infty,0)$ است یعنی تابع نه زوج است نه فرد

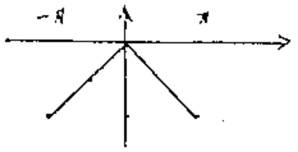
$f(x)=\frac{1}{x}$ $f(-x)=-\frac{1}{x}=-f(x)$ فرد است

$f(x)=\sinh x$ $f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\sinh x$ فرد است

$f(x)=e^{x}$ $f(-x)=e^{-x}$ نه زوج و نه فرد

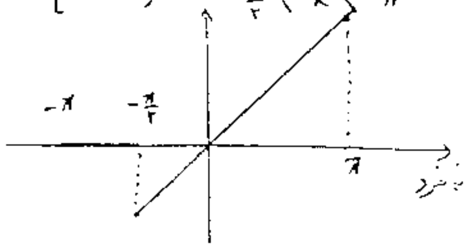
$f(x)=e^{|x|}$ $f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}$ زوج

b) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad -\pi<x<0 \\ -x & ; \quad 0<x<\pi \end{cases}$



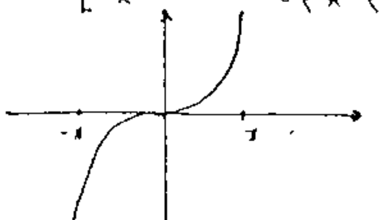
تابع زوج

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ x & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$



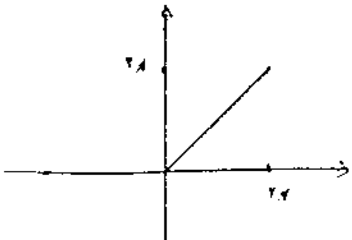
نه زوج نه فرد

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \quad -\pi<x<0 \\ x^2 & \quad 0<x<\pi \end{cases}$



تابع فرد

e) $f(x)=|x| \quad 0<x<2\pi$ نه زوج نه فرد



www.mohandesyar.com

۳-

الف) $\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+p} f(x)\,dx$

می دانیم: $\int_{a}^{a+۲p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ ① $\quad \int_{b}^{b+۲p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$ ②

$①,② \Rightarrow \int_{a}^{a+۲p} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+۲p} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx + \int_{a+p}^{a+۲p} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+p} f(x)\,dx + \int_{b+p}^{b+۲p} f(x)\,dx \quad \circledast$

$\int_{a+p}^{a+۲p} f(x)\,dx = \int_{(a+p)-p}^{(a+۲p)-p} f(x-p)\,dx = \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx$ (به علت متناوب بودن با دوره p)

$\Rightarrow \int_{a+p}^{a+۲p} = \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx$ به همین ترتیب $\Rightarrow \int_{b+p}^{۲p+b} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+p} f(x)\,dx$

$\circledast \Rightarrow ۲\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = ۲\int_{b}^{b+p} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+p} f(x)\,dx$

ب) $\int_{a}^{a+۲p} f(x)\,dx = \int_{a}^{۰} f(x)\,dx + \int_{۰}^{p} f(x)\,dx + \int_{p}^{۲p} f(x)\,dx + \int_{۲p}^{۲p+a} f(x)\,dx = \cancel{-\int_{۰}^{a} f(x)\,dx} +$

$\int_{۰}^{p} f(x)\,dx + \int_{-p}^{۰} \underbrace{f(x-۲p)}_{f(x)}\,dx + \cancel{\int_{۰}^{a} \underbrace{f(x-۲p)}_{f(x)}\,dx} = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx$

۴- سری فوریه هریک از توابع زیر را بیابید.

a) $f(x) = x + \sin x \qquad -\pi < x < \pi$

$f(x) = g(x) + \sin x$

$g(x) = x \qquad -\pi < x < \pi \qquad a_n = ۰$ به علت فرد بودن g

$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx \Rightarrow \pi b_n = ۲\int_{۰}^{\pi} x \sin nx\,dx = ۲\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{۱}{n^۲}\sin nx\right]_{۰}^{\pi}$

$b_n = \frac{۲\pi}{n}(-۱)^{n+۱} \qquad g(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}\sin nx \Rightarrow f(x) = \sin x + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx$

www.mohandesyar.com

$$b)\ \begin{cases} f(x) = \sin\frac{\pi x}{l} & ; \quad ۰ < x < l \\ f(x) = f(-x) & ; \quad -l < x < ۰ \end{cases}$$

$b_n = ۰$ بعلت زوج بودن f

$$a_۰ = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{۴}{\pi} \quad , \ a_1 = ۰$$

$$a_n = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad n \geq ۲$$

$$۲\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \Rightarrow ۲\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x = \sin(1+n)\frac{\pi}{l}x + \sin(1-n)$$

$$l\,a_n = \int_{۰}^{l}\left(\sin(1+n)\frac{\pi}{l}x + \sin(1-n)\frac{\pi}{l}x\right)dx = \frac{-l}{\pi(1+n)}\cos(1+n)\frac{\pi}{l}x\Big]_{۰}^{l} - \frac{l}{\pi(1-n)}\cos(1-$$

$$a_n = \frac{-1}{\pi(1+n)}\left[(-1)^{n+1} - 1\right] - \frac{1}{\pi(1-n)}\left[(-1)^{1-n} - 1\right] = -\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]\left(\frac{1}{1+n} + \right.$$

$$a_n = \frac{۲\left[(-1)^n + 1\right]}{\pi(1-n^۲)} \Rightarrow f(x) = \frac{۲}{\pi} + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-n^۲}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$c)\ f(x) = \sinh x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$a_n = ۰$ f فرد است پس

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\sinh x\sin n\pi x\,dx = ۲\int_{۰}^{1}\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\sin n\pi x\,dx = \int_{۰}^{1} e^x\sin n\pi x\,dx - \int_{۰}^{1} e^{-x}\sin n\pi x\,dx = I$$

* بروش جزء بجزء می‌آییم :

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$I_1 = \frac{e^x}{1+(n\pi)^1}(\sin n\pi x - n\pi\cos n\pi x)\Big]_{۰}^{1} = \frac{n\pi}{1+(n\pi)^۲}\left(e^1(-1)^{n+1} + 1\right).$$

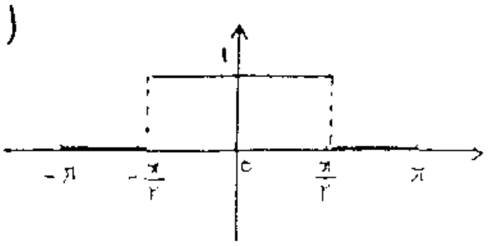
$$I_۲ = \frac{e^{-x}}{1+(n\pi)^۲}(-\sin n\pi x - n\pi\cos n\pi x)\Big]_{۰}^{1} = \frac{n\pi}{1+(n\pi)^۲}\left(e^{-1}(-1)^{n+1} + 1\right).$$

$$I_1 - I_۲ = \frac{n\pi}{1+(n\pi)^۲}\left((e^1 - e^{-1})(-1)^{n+1}\right) = \frac{۲n\pi\sinh 1}{1+(n\pi)^۲}(-1)^{n+1} \qquad \sinh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲\pi\sinh 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{1+(n\pi)^۲}\sin n\pi x$$

www.mohandesyar.com

d)



$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{۲} \\ 1 & ; \quad -\frac{\pi}{۲} \leqslant x < \frac{\pi}{۲} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$f(x)$ زوج است

پس $b_n = 0$

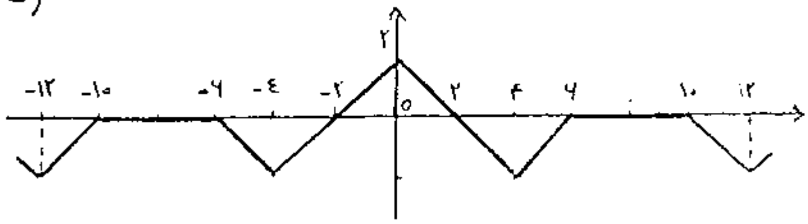
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} dx = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}$$

$$f(x) = \frac{1}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}\cos nx = \frac{1}{۲} + \frac{۲}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{۳}\cos ۳x + \frac{1}{۵}\cos ۵x - \dots\right)$$

---

e)



$$f(x)=\begin{cases} ۲-x & ; \quad 0 \leqslant x < ۴ \\ -۶+x & \quad ۴ \leqslant x < ۶ \\ 0 & \quad ۶ \leqslant x < ۸ \end{cases}$$

$b_n = 0$: $f(x)$ زوج است پس

$$a_0 = \frac{۲}{P}\int_0^P f(x)\,dx = \frac{۲}{۸}\int_0^۸ f(x)\,dx = \frac{1}{٤}\int_0^٤ f(x)\,dx + \frac{1}{٤}\int_۴^۶ f(x)\,dx + \frac{1}{٤}\int_۶^۸ f(x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{٤}\left(\frac{-۲\times ۲}{۲}\right) + 0 = -\frac{1}{۲}$$

$$a_n = \frac{۲}{۸}\int_0^۸ f(x)\cos\frac{n\pi}{۸}x\,dx = \frac{1}{٤}\int_0^۴ (۲-x)\cos\frac{n\pi}{۸}x\,dx + \frac{1}{٤}\int_٤^۶ (x-۶)\cos\frac{n\pi}{۸}x\,dx + 0$$

$$= \frac{1}{٤}\left[(۲-x)\frac{۸}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۸}x - \left(\frac{۸}{n\pi}\right)^۲\cos\frac{n\pi}{۸}x\right]_0^۴ +$$

$$\frac{1}{٤}\left[(x-۶)\frac{۸}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۸}x + \left(\frac{۸}{n\pi}\right)^۲\cos\frac{n\pi}{۸}x\right]_٤^۶ = \frac{۱۶}{(n\pi)^۲}\left[1 - ۲\cos\frac{n\pi}{۲} + \cos\frac{۳n\pi}{۴}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{٤} + \frac{۱۶}{\pi^۲}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^۲}\left(1 - ۲\cos\frac{n\pi}{۲} + \cos\frac{۳n\pi}{٤}\right)\cos\frac{n\pi}{۸}x$$

www.mohandesyar.com

f) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad -1 < x < 0 \\ -x & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{1} -x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} \cos n\pi x\,dx + \int_{0}^{1} -x \cos n\pi x\,dx = -\Big[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2} \cos$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} \sin n\pi x\,dx + \int_{0}^{1} -x \sin n\pi x\,dx$$

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2} \qquad b_n = -\frac{1+(-1)^n}{2\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n+1}{2} \sin n\pi x$$

- با بکار بردن سری فوریه $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ نشان دهید که $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \times dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\,dx = 1 \qquad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi} \sin nx \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

طبق قضیه دیریکله :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$$x = \pi \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos \pi - \frac{1}{3} \cos 3\pi + \frac{1}{5} \cos 5\pi - \cdots\right) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

www.mohandesyar.com

۴) سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

a) $$f_{(x)}=\begin{cases} 0 & ; \quad 0<x<\frac{L}{۲} \\ 1 & ; \quad \frac{L}{۲}<x<L \end{cases}$$

$$a_0=\frac{۲}{L}\int_{\frac{L}{۲}}^{L} dx=\frac{۲}{L}\times\frac{L}{۲}=1 \Rightarrow a_0=1$$

$$a_n=\frac{۲}{L}\int_{\frac{L}{۲}}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{۲}{L}\left[\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{\frac{L}{۲}}^{L}=\frac{۲}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{۲}$$

$$f_{(x)}=\frac{1}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{۲}{\pi}\times\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{۲}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\frac{1}{۲}-\frac{۲}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{L}-\frac{1}{۳}\cos\frac{۳\pi}{L}x+\cdots\right)$$

* * *

b) $f_{(x)}=\sin\frac{\pi x}{L} \qquad 0<x<L$

$$a_0=\frac{۲}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\,dx=\frac{۲}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi x}{L}\right]_0^L=\frac{۴}{\pi}$$

$$a_1=\frac{۲}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{L}\left(\frac{L}{۲\pi}\cos\frac{۲\pi x}{L}\right)_0^L=0$$

$$a_n=\frac{۲}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{۲}{L}\int_0^L\frac{1}{۲}\left[\sin(1+n)\frac{\pi}{L}x+\sin(1-n)\frac{\pi}{L}x\right]dx$$

$$=-\frac{1}{L}\left[\frac{L}{\pi(1+n)}\cos(1+n)\frac{\pi x}{L}+\frac{L}{\pi(1-n)}\cos(1-n)\frac{\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1+n}+\frac{(-1)^n}{1-n}+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right]=\frac{-۲\left[(-1)^n+1\right]}{\pi(n^۲-1)}$$

$$f_{(x)}=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\left(\frac{1}{1\times۳}\cos\frac{۲\pi x}{L}+\frac{1}{۳\times۵}\cos\frac{۴\pi x}{L}+\cdots\right)$$

www.mohandesyar.com

c) $f(x) = \sin x \qquad ۰ < x < \pi$

$a_۰ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \sin x \, dx = \frac{۴}{\pi} \qquad a_۱ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \sin x \cos x \, dx = ۰$

$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \frac{۱}{۲}\left[\sin(۱+n)x + \sin(۱-n)x\right] dx$

$= -\frac{۱}{\pi}\left[\frac{\cos(۱+n)x}{۱+n} + \frac{\cos(۱-n)x}{۱-n}\right]_۰^{\pi} = -\frac{۱}{\pi}\left[\frac{(-۱)^{n+۱}}{۱+n} + \frac{(-۱)^{n+۱}}{۱-n} - \frac{۱}{۱+n} - \frac{۱}{۱-n}\right.$

$= \frac{۱}{\pi} \, \frac{۲}{۱-n^۲}\left[(-۱)^n + ۱\right]$

$f(x) = \frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{\cos ۲x}{۱-۲^۲} + \frac{\cos ۴x}{۱-۴^۲} + \dots\right)$

---

d) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad ۰ < x < ۱ \\ ۲-x & ; \quad ۱ < x < ۲ \end{cases}$

$a_۰ = \frac{۲}{۲}\int_۰^{۲} f(x)\, dx = \int_۰^{۱} x \, dx + \int_۱^{۲} (۲-x)\, dx = ۱$

$a_n = \frac{۲}{۲}\int_۰^{۱} x \cos\frac{n\pi}{۲}x \, dx + \frac{۲}{۲}\int_۱^{۲} (۲-x)\cos\frac{n\pi}{۲}x \, dx$

$= \left[\frac{۲}{n\pi} x \sin\frac{n\pi}{۲}x + \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲ \cos\frac{n\pi x}{۲}\right]_۰^۱ +$

$\left[۲ \times \frac{۲}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}x - \frac{۲}{n\pi} x \sin\frac{n\pi x}{۲} - \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲ \cos\frac{n\pi}{۲}x\right]_۱^۲$

$= \left[\cancel{\frac{۲}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}} + \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲\cos\frac{n\pi}{۲} - \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲ + \cancel{\frac{۴}{n\pi}\sin n\pi} - \cancel{\frac{۴}{n\pi}\sin n\pi} - \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲\cos n\right.$

$\left. - \cancel{\frac{۴}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}} + \cancel{\frac{۲}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}} + \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲\cos\frac{n\pi}{۲}\right] = \left(\frac{۲}{n\pi}\right)^۲\left(۲\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos n\right.$

اگر n فرد باشد $a_n = ۰$ است. همچنین اگر n مضرب ۴ باشد داریم $a_n = ۰$ در غیر این صورت $a_n = -\frac{۱۶}{(n\pi)^۲}$

$f(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}\left(۲\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi - ۱\right)\cos\frac{n\pi}{۲}x$ n می‌تواند مقادیر

$f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲n+۱)^۲}\cos(۲n+۱)\pi x$ $\Leftarrow$ ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ... را اختیار کند

www.mohandesyar.com

۷) سری فوریه سینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بدست آورید؟

برای تمام توابع این سؤال $a_n = ۰$ است.

a) $$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad ۰ < x < \frac{L}{۲} \\ L - x & ; \quad \frac{L}{۲} < x < L \end{cases}$$

$$b_n = \frac{۲}{L}\int_۰^{L/۲} x \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx + \frac{۲}{L}\int_{L/۲}^{L} (L - x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$= \frac{۲}{L}\left[-x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^۲ \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_۰^{\frac{L}{۲}} -$$

$$\frac{۲}{L}\left[(L - x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^۲ \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_{L/۲}^{L}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۴L}{\pi^۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)^۲} \sin (۲n-۱)\frac{\pi}{L} x$$

---

b) $$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad ۰ < x < ۱ \\ ۲ - x & ; \quad ۱ < x < ۲ \end{cases}$$

حالت خاص a با $l = ۲$ می‌باشد پس داریم:

$$f(x) = \frac{۴ \times ۲}{\pi^۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)^۲} \sin (۲n-۱) \frac{\pi x}{۲}$$

---

c) $f(x) = \cos ۲x \qquad ۰ < x < \pi$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} \cos ۲x \sin nx \, dx = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} \left(\sin(n+۲)x + \sin(n-۲)x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{۱}{\pi(n+۲)} \cos(n+۲)x \right]_۰^{\pi} + \left[-\frac{۱}{\pi(n-۲)} \cos(n-۲)x \right]_۰^{\pi} = \frac{(-۱)^{n+۲} - ۱}{\pi(n+۲)} - \frac{(-۱)^{n-۲} - ۱}{\pi(n-۲)}$$

$$= \frac{۲n\left[۱ + (-۱)^{n+۱}\right]}{\pi(n^۲ - ۴)}$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{\pi} \times \frac{۱ + (-۱)^{n+۱}}{n^۲ - ۴} \times n \sin nx = \frac{۴}{\pi}\left[\frac{\sin x}{۱^۲ - ۲^۲} + \frac{۳ \sin ۳x}{۳^۲ - ۲^۲} + \cdots \right]$$

www.mohandesyar.com

d) $f(x) = x^۲ \quad ; \quad ۰ < x < \pi$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x^۲ \sin nx \, dx = \frac{۲}{\pi}\left(-\frac{x^۲}{n}\cos nx + \frac{۲x}{n^۲}\sin nx + \frac{۲}{n^۳}\cos nx\right)\Big|_۰^\pi$$

$$= \left(-\frac{\pi^۲}{n}(-1)^n + \frac{۲}{n^۳}(-1)^n - \frac{۲}{n^۳}\right)\frac{۲}{\pi} = \left(\frac{\pi^۲}{n}(-1)^{n+1} + \frac{۲}{n^۳}\left((-1)^n - 1\right)\right)\frac{۲}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{۲}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^۲}{n} + \frac{۲}{n^۳}\left[(-1)^n - 1\right]\right]\sin nx$$

---

۸ - هرگاه $-\pi < x < \pi \ ; \ f(x) = \cos\mu x$ که در آن μ عددی غیرصحیح است. آنگاه نشان دهید:

ل)
$$f(x) = \frac{۲\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left\{\frac{1}{۲\mu^۲} + \frac{\cos x}{1-\mu^۲} - \frac{\cos ۲x}{۲^۲-\mu^۲} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^۲-\mu^۲} + \cdots\right\}$$

و از آنجا استنتاج کنید (
$$\cot\mu\pi = \frac{۲\mu}{\pi}\left\{\frac{1}{۲\mu^۲} + \frac{1}{\mu^۲-1} + \frac{1}{\mu^۲-۲^۲} + \cdots + \frac{1}{\mu^۲-n^۲} + \cdots\right\}$$

همچنین نشان دهید که (
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{۹n^۲-1} = \frac{1}{۲} - \frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۸}$$

ف) تابع زوج است پس داریم:

$$a_۰ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \cos\mu x \, dx = \frac{۲}{\mu\pi}\sin\mu\pi \quad و \quad b_n = ۰$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi \cos\mu x \cos nx \, dx = \frac{۲}{\pi}\times\frac{1}{۲}\int_۰^\pi\left[\cos(\mu+n)x + \cos(\mu-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n}\sin(\mu+n)x + \frac{1}{\mu-n}\sin(\mu-n)x\right]_۰^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n}\sin\mu\pi + n\pi + \frac{1}{\mu-n}\sin\mu\pi - n\pi\right]$$

$$= \frac{\sin\mu\pi\cos n\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu-n}\right] = \frac{۲\mu\sin\mu\pi}{\pi(n^۲-\mu^۲)}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{۲\mu^۲} + \frac{\cos x}{1-\mu^۲} - \frac{\cos ۲x}{۲^۲-\mu^۲} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^۲-\mu^۲} + \cdots\right]$$

www.mohandesyar.com

ب) اگر $x=\pi$ داریم:

$$\cos \mu\pi = \frac{۲\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left[\frac{۱}{۲\mu^۲}+\frac{\cos \pi}{۱-\mu^۲}-\frac{\cos ۲\pi}{۲^۲-\mu^۲}+\cdots\right]$$

$$= \frac{۲\mu}{\pi}\sin\mu\pi\left[\frac{۱}{۲\mu^۲}+\frac{-۱}{۱-\mu^۲}+\frac{-۱}{۲^۲-\mu^۲}+\cdots+\frac{-۱}{n^۲-\mu^۲}+\cdots\right]$$

$$\cot\mu\pi = \frac{\cos\mu\pi}{\sin\mu\pi} = \frac{۲\mu}{\pi}\left[\frac{۱}{۲\mu^۲}+\frac{۱}{\mu^۲-۱}+\frac{۱}{\mu^۲-۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{\mu^۲-n^۲}+\cdots\right]$$

ج) $\mu=\frac{۱}{۳} \Leftarrow$

$$\cot\frac{\pi}{۳} = \frac{۲}{۳\pi}\left[\frac{۹}{۲}+\frac{۹}{۱-۹}+\frac{۹}{۱-۹\times۲^۲}+\cdots+\frac{۹}{۱-۹n^۲}+\cdots\right]$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۸}{۳\pi}\left[\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱-۹n^۲}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}\,\pi}{۱۸} = \frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱-۹n^۲}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۹n^۲-۱} = \frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}\,\pi}{۱۸}$$

۹ـ ثابت کنید به ازای $-\pi < x < \pi$ الف) که در آن a غیرصحیح است

$$\sin ax = \frac{۲\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{۱^۲-a^۲}-\frac{۲\sin ۲x}{۲^۲-a^۲}+\frac{۳\sin ۳x}{۳^۲-a^۲}-\cdots\right)$$

ب)

$$x\cos x = -\frac{۱}{۲}\sin x+۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n\,n}{n^۲-۱}\sin nx$$

الف) $\sin ax$ فرد است پس $a_0=a_n=0$ و

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\sin ax\sin nx\,dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\,dx = \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)x}{a-n}-\frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]_۰^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin a\pi-n\pi}{a-n}-\frac{\sin a\pi+n\pi}{a+n}\right] = \frac{\sin a\pi\cos n\pi}{\pi}\left[\frac{۱}{a-n}-\frac{۱}{a+n}\right]$$

$$= \frac{۲\sin a\pi}{\pi}\times\frac{n(-۱)^n}{(a^۲-n^۲)}$$

$$\Rightarrow \sin ax = \frac{۲\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{۱}{۱-a^۲}\sin x-\frac{۲\sin ۲x}{۲^۲-a^۲}+\frac{۳\sin ۳x}{۳^۲-a^۲}-\cdots\right]$$

www.mohandesyar.com

ب) $x\cos x$ تابعی فرد است پس داریم: $a_n = a_0 = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[x\sin(n+1)x + x\sin(n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x - \frac{x\cos(n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{\pi(-1)^n}{n+1} + 0 + \frac{\pi(-1)^n}{n-1} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0\right]\frac{1}{\pi} = \frac{2n(-1)^n}{n^2-1} \qquad n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$$

۱۰- ثابت کنید که (فرمول پارسوال)

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

در این فرمول a_n و b_n ضرایب اویلر سری فوریه تابع $f(x)$ هستند.

برهان: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos kx + b_n\sin$

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$f^2(x) = \frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos kx + b_n\sin kx + \left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin kx\right]$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin kx\right]$$

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = A + B + C \qquad A = \int_{-l}^{l}\frac{a_0^2}{4}dx = \frac{a_0^2}{2}l$$

$$B = \int_{-l}^{l}\left(a_0\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos kx + b_n\sin kx\right)dx = \int_{-l}^{l}\left(a_0\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= a_0\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx + \int_{-l}^{l}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right) = 0 + 0 = 0$$

$$C = \int_{-l}^{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin kx\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin kx\right]dx$$

www.mohandesyar.com

$$= \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx\right)^{۲} dx + ۲\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx \, dx + \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx\right)^{۲} dx$$

$$= I_1 + I_{۲} + I_{۳} \qquad I_1 = \int_{-l}^{l}\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_{۲}\cos\frac{۲\pi}{l}x+\cdots\right)\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_{۲}\cos\frac{۲\pi}{l}x+\cdots\right)dx$$

عبارات زیرانتگرال I_1 از ضرب عوامل $a_m \cos\frac{m\pi}{l}x$ و $a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$ حاصل می‌شوند که دو حالت (۱ و ۲) دارد.

حالت اول) $m = n \Rightarrow \int_{-l}^{l} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = a_n^{۲}\int_{-l}^{l}\cos^{۲}\frac{n\pi}{l}x\,dx = a_n^{۲}\cdot l$

حالت دوم) $m \neq n \Rightarrow \int_{-l}^{l} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot a_m\cos\frac{m\pi}{l}x\,dx = a_n a_m\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\frac{m\pi}{l}x = 0$.

با توجه به روابط صفحه‌ی ۲ کتاب شیدفر

$$\Rightarrow I_1 = l\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{۲}$$

$$I_{۲} = ۲\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos kx\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin kx = ۲\int_{-l}^{l}\left(a_1\cos\frac{\pi}{l}x + a_{۲}\cos\frac{۲\pi}{l}x+\cdots\right)\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x+\cdots\right)dx$$

$$= ۲\int_{-l}^{l}\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m\cos\frac{m\pi}{l}x\cdot b_n\sin\frac{n\pi}{l}x = ۲\sum_{m,n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} a_m b_n\cos\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = ۲\times 0 = 0$$

$$I_{۳} = \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin kx\right)^{۲}dx = \int_{-l}^{l}\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x + b_{۲}\sin\frac{۲\pi}{l}x+\cdots\right)\left(b_1\sin\frac{\pi}{l}x + b_{۲}\sin\frac{۲\pi}{l}x+\cdots\right)dx$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} b_n^{۲}\sin^{۲}\frac{n\pi}{l}x\,dx}_{n=m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n b_m \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} l b_n^{۲} + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f^{۲}(x)\,dx = A+B+C = \frac{a_0^{۲}}{۲}l + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} l\left(a_n^{۲}+b_n^{۲}\right) = l\left(\frac{a_0^{۲}}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{۲}+b_n^{۲}\right)\right)$$

www.mohandesyar.com

ات کنید که (الف)

$$\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right) = -\sum_{n=1} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad ۰ < x < \pi$$

ـه بسط $\ln$ از ریاضیات عمومی ۱ داریم :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^۲}{۲} + \frac{z^۳}{۳} - \frac{z^۴}{۴} + \cdots$$

$$z = -e^{ix} \longrightarrow \ln(1-e^{ix}) = -e^{ix} - \frac{(-e^{ix})^۲}{۲} + \frac{(-e^{ix})^۳}{۳} - \cdots$$

$$\ln(1-e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}(\cos nx + i\sin nx)$$

$$۲\sin\frac{x}{۲} = ۲\left(\frac{e^{i\frac{x}{۲}} - e^{-i\frac{x}{۲}}}{۲i}\right) = i e^{-\frac{ix}{۲}}(1-e^{ix})$$

$$\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right) = \ln\left(i e^{-\frac{ix}{۲}}(1-e^{ix})\right)$$

$$\mathrm{Re}\left[\ln i e^{-\frac{ix}{۲}}(1-e^{ix})\right] = \mathrm{Re}\left(\ln i e^{-\frac{ix}{۲}} + \ln(1-e^{ix})\right) = \ln(1-e^{ix})$$

$$\ln\left(۲\sin\frac{x}{۲}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \qquad ۰ < x < \pi$$

ب)

$$\ln\left(۲\cos\frac{x}{۲}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

حال در بسط $\ln$ بالا به جای z قرار دهیم e^{ix} خواهیم داشت :

$$\ln(1+e^{ix}) = e^{ix} - \frac{(e^{ix})^۲}{۲} + \frac{(e^{ix})^۳}{۳} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{(ix)n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\cos nx + i\sin nx)$$

$$۲\cos\frac{x}{۲} = ۲\left(\frac{c^{\frac{ix}{۲}} + e^{-\frac{ix}{۲}}}{۲}\right) = (e^{ix}+1)e^{-\frac{ix}{۲}}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\ln\left(e^{\frac{ix}{۲}}(1+e^{ix})\right)\right\} = \frac{ix}{۲} + \ln(1+e^{ix}) = \ln(1+e^{ix})$$

www.mohandesyar.com

۱۴) انتگرال فوریه هریک از توابع را بیابید :

a) $f(x) = \begin{cases} x \, ; & 0 < x < a \\ 0 \, ; & x > a \end{cases}$ $\qquad f(-x) = f(x)$

تابع زوج است بنابراین داریم : $B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^a x \cos wx \, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{w}\sin wx + \frac{1}{w^2}\cos wx\right)_0^a$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{w}\sin aw + \frac{1}{w^2}\cos aw - \frac{1}{w^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2}\right]\cos wx \, dw$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{-2x} & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$ $\qquad B(w) = 0 \qquad$ تابع زوج است

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\cos wx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x}\cos wx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}\left(-\cos wx + w \sin wx\right) + \frac{e^{-2x}}{4+w^2}\left(-2\cos wx + w \sin wx\right)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(0+0) - \left(\frac{1}{1+w^2} \times (-1) + \frac{1}{4+w^2} \times (-2)\right)\right] = \frac{3}{\pi} \times \frac{2+w^2}{4+5w^2+w^4}$$

$$f(x) = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+w^2}{4+5w^2+w^4}\cos wx \, dx$$

---

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \, ; & 0 < x < a \\ 0 \, ; & x > a \end{cases}$ $\quad$ و $f(x) = f(-x)$ $\qquad B(w) = 0$ تابع زوج است

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^a x^2 \cos wx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{w}\sin wx + \frac{2x \cos wx}{w^2} - \frac{2}{w^3}\sin wx\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a^2}{w}\sin aw + \frac{2a}{w^2} - \frac{2}{w^3}\sin aw - 0\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(a^2 - \frac{2}{w^2}\right)\sin aw + \frac{2a}{w}\cos aw\right]\frac{\cos wx}{w} \, dw$$

www.mohandesyar.com

ا- هرگاه $f(-x)=f(x)$ آنگاه ثابت کنید:

a) $f(bx)=\frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{w}{b}\right)\cos wx\,dw \quad ; \quad b>0$

$$f(u)=\int_0^\infty a'(w)\cos wu\,dw \quad , \quad a'(w)=\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty f(u)\cos wu\,du=a(w)$$

$$f(u)=\int_0^\infty a(w)\cos wu\,dw \xRightarrow{u=bx} f(bx)=\int_0^\infty a(w)\cos wbx\,dw$$

$$wb=w' \Rightarrow b\,dw=dw'$$

$$\Rightarrow f(bx)=\int_0^\infty a\left(\frac{w'}{b}\right)\cos w'x\,\frac{dw'}{b}=\frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{w'}{b}\right)\cos w'x\,dw'$$

---

b) $x^{۲}f(x)=\int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw \quad , \quad a^*=-\frac{d^{۲}a}{dw^{۲}}$

$$\int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw=\int_0^\infty -\frac{d^{۲}}{dw^{۲}}a(w)\cos wx\,dw=-\int_0^\infty a''(w)\cos wx\,dw$$

بااستفاده ازجزء به جزء داریم : $\int_0^\infty a''_{(w)}\cos wx\,dw=a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty-\int_0^\infty(-x\sin wx)\,a'_{(w)}\,dw$

$$* \Rightarrow \int_0^\infty a^*(w)\cos wx\,dw=-\left[\Big[a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty+a(w)\,x\sin wx\Big]_0^\infty-\int_0^\infty x^{۲}a(w)\cos wx\,d\right.$$

$$=\Big[-a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty-\Big[a(w)\,x\sin wx\Big]_0^\infty+x^{۲}\int_0^\infty a(w)\cos wx\,dw=I_1+I_۲+x^{۲}\,\vdots$$

باید نشان دهیم I_1 و $I_۲$ هردو صفرند

$$I_1=\Big[-a'(w)\cos wx\Big]_0^\infty=0 \quad , \quad I_۲=0$$

حل دوم مورد b

$$\overset{*}{a}(w)=\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty x^{۲}f(x)\cos wx\,dx \qquad *$$

$$a(w)=\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \xRightarrow[\text{نسبت به } w]{\text{مشتق}} a'(w)=-\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\sin wx\,dx \xRightarrow[\text{نسبت به } w]{\text{مشتق گیری}}$$

$$a''(w)=-\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty x^{۲}f(x)\cos wx\,dx \xRightarrow{\quad * \quad} a''(w)=-\overset{*}{a}_{(w)} \Rightarrow \overset{*}{a}(w)=-\frac{d^{۲}a}{dw^{۲}}$$

۱۴- ثابت کنید

a) $\int_0^\infty \frac{w^۳ \sin wx}{w^۴+۴}\,dw = \frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x \;;\; x>0 \;,\; f(x) = -f(-x) \;;\; x<0$

if $f(-x) = -f(x) \Rightarrow a(w) = 0 \;,\; f(x) = \int_0^\infty b(w) \sin wx\,dw$

فرض : $b(w) = \frac{w^۳}{w^۴+۴} \;,\; \int_0^\infty b(w) \sin wx\,dw = f(x) \Rightarrow b(w) = \frac{۲}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin wx\,dx$

$$b(w) = \frac{۲}{\pi} \int_0^\infty \frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x \cdot \sin wx\,dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos x \cdot \sin wx\,dx = \frac{1}{۲} \int_0^\infty e^{-x} (\sin(w+1)x + \sin(w-1)x$$

$$\Rightarrow ۲b(w) = \int_0^\infty e^{-x} \sin(w+1)x\,dx + \int_0^\infty e^{-x} \sin(w-1)x\,dx$$

با توجه به راهنمای * در تست سوال ۴ داریم:

$$۲b(w) = \frac{e^{-x}}{1+(w+1)^۲} \left(-\sin(w+1)x - (w+1)\cos(w+1)x\right)\Big]_0^\infty +$$

$$\frac{e^{-x}}{1+(w-1)^۲} \left[-\sin(w-1)x - (w-1)\cos(w-1)x\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow ۲b(w) = \frac{w+1}{1+(w+1)^۲} + \frac{w-1}{1+(w-1)^۲} = \frac{۲w^۳}{w^۴+۴} \Rightarrow b(w) = \frac{w^۳}{w^۴+۴}$$

---

b) $\int_0^\infty \frac{\cos(w\frac{\pi}{۲}) \cos wx}{1-w^۲}\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{۲} \cos x & ; |x| < \frac{\pi}{۲} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

if $f(-x) = f(x) \Rightarrow b(w) = 0 \;,\; f(x) = \int_0^\infty a(w) \cos wx\,dw$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{۲} w)}{1-w^۲} \cos wx\,dw = \int_0^\infty a(w) \cos wx\,dw = f(x) \Rightarrow a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos wx\,dx$$

$a(w) = \frac{\cos \frac{\pi}{۲} w}{1-w^۲}$

هدف از برهان این است که اگر $f(x)$ سمت راست باشد b آنگاه $a(w)$:

$$a(w) = \frac{۲}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos wx\,dx = \frac{۲}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi}{۲} \cos x \cos wx\,dx = \frac{1}{۲} \int_0^{\frac{\pi}{۲}} (\cos(w+1)x + \cos(w-1)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{۲(w+1)} \sin(w+1)x \Big]_0^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{1}{۲(w-1)} \sin(w-1)x \Big]_0^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\sin(w+1)\frac{\pi}{۲}}{۲(w+1)} + \frac{\sin(w-1)\frac{\pi}{۲}}{۲(w-1)}$$

$$= \frac{-۲\cos w\frac{\pi}{۲}}{۲(w^۲-1)} = \frac{\cos w\frac{\pi}{۲}}{1-w^۲}$$

www.mohandesyar.com

$$C)\quad \int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w}\,dw = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0\leqslant x<1 \\ \frac{\pi}{4} & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

$f(-x)=f(x)$ $\quad -\infty < x < 0$

چون f زوج است $\Leftarrow b(w)=0$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{2}\cos wx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty 0\cos wx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi x\cos wx\,dx = \frac{\sin w}{w}$$

$$\text{if } x=1 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin w\cos w}{w}\,dw = \int_0^\infty \frac{\sin 2w}{2w}\,dw = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

۱۷- سری فوریه مختلط هریک از توابع زیر را بیابید به کمک آن سری فوریه حقیقی متناظر با آنها را معین کنید.

$$a)\ f(x)=e^{2x}\quad -\pi<x<\pi \quad ; \quad f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{2+in}{4+n^2}(-1)^n\sinh 2\pi\, e^{inx}$$:جواب

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2-in}\left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in}\right.$$

$$e^{in\pi}=(-1)^n=\cos n\pi+\cancel{i\sin n\pi}_{0} \Rightarrow c_n=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{2-in}\times\frac{2+in}{2+in}\left(e^{2\pi}e^{-in\pi}-e^{-2\pi}e^{+in\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\times\frac{2+in}{4+n^2}\times 2\times(-1)^n\sinh 2\pi$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{2+in}{4+n^2}(-1)^n\sinh 2\pi\, e^{inx}$$

$a_n=c_n+c_{-n}$

$b_n=i(c_n-c_{-n})$

$$b)\ f(x)=x\quad ; -\pi<x<\pi \longrightarrow c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x}{in}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{\pi}{in}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-in\pi}-\left(\frac{\pi}{in}+\frac{1}{n^2}\right)e^{in\pi}\right.$$

$$=-\frac{\pi}{in}\left(e^{in\pi}+e^{-in\pi}\right)-\frac{1}{n^2}\cancel{\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right)}_{0}=\frac{i}{n}(-1)^n$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{i}{n}e^{inx}$$

www.mohandesyar.com

۱۸-

$$a)\ f(x)=\begin{cases} e^{-۲x} & ; \quad -\pi<x<\pi \\ ۰ & ; \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$c(w)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-۲x} e^{-iwx}\,dx = \frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{-e^{-(۲x+iwx)}}{(۲+iw)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{e^{(۲+iw)\pi}-e^{-(۲+iw)\pi}}{۲+iw}\right] = \frac{۲-iw}{\pi(۴+w^۲)}\left[\frac{e^{(۲+iw)\pi}-e^{-(۲+iw)\pi}}{۲}\right]$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۲-iw}{\pi(۴+w^۲)}\left[\frac{e^{(۲+iw)\pi}-e^{-(۲+iw)\pi}}{۲}\right]e^{iwx}\,dw$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases} \sinh ۲x & ; \quad ۰<x<۲ \\ ۰ & ; \quad \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$c(w)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲}\sinh ۲x\, e^{-iwx}\,dx = \frac{۱}{۴\pi}\int_{۰}^{۲} e^{۲x} e^{-iwx}\,dx - \frac{۱}{۴\pi}\int_{۰}^{۲} e^{-۲x} e^{-iwx}\,dx$$

$$=\frac{۱}{۴\pi}\left[\frac{e^{(۲-iw)x}}{(۲-iw)}+\frac{e^{-(۲+iw)x}}{(۲+iw)}\right]_{۰}^{۲} = \frac{۱}{۴\pi}\left[\frac{e^{۴-۲iw}}{۲-iw}+\frac{e^{-۴-۲iw}}{۲+iw}-\frac{۱}{۲-iw}-\frac{۱}{۲+iw}\right]$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} c(w)\, e^{iwx}\,dw$$

www.mohandesyar.com

۱- آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی سری فوریه تابع $f(x)=e^{x}$ موجود است.

خیر، زیرا e^{x} به طور مطلق انتگرال پذیر نیست

$$\left|\int_{0}^{\infty} e^{x}\,dx\right| > \infty$$

۲۱- $F_s\{e^{-ax}\}$; $a>0$ را با انتگرال گیری به دست آورید:

$$F_s\left\{e^{-ax}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin wx\, dx$$

حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx$ به روش جزء به جزء قابل محاسبه است. بدین ترتیب که

$$I_0 = \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin wx\, dx = uv - \int_{0}^{\infty} v\,du = \frac{-e^{-ax}\cos wx}{w} - \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{a}{w} e^{-ax} \cos wx\, dx}_{I}$$

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -a e^{-ax}\, dx$$

$$dv = \sin wx\, dx \Rightarrow v = -\frac{\cos wx}{w}$$

برای I بازهم به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$I = \frac{a}{w}\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos wx\, dx = uv - \int_{0}^{\infty} v\,du = \frac{a}{w^2} e^{-ax} \sin wx + \frac{a^2}{w^2} \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin wx\, dx}_{I_0}$$

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -a e^{-ax}\, dx$$

$$dv = \cos wx\, dx \Rightarrow v = \frac{\sin wx}{w}$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{w} e^{-ax} \cos wx - \frac{a}{w^2} e^{-ax} \sin wx - \frac{a^2}{w^2} \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin wx\, dx}_{I_0}$$

$$\Rightarrow I_0 = \left[-\frac{1}{w}\left(e^{-ax}\cos wx + \frac{a}{w} e^{-ax} \sin wx\right)\frac{w^2}{a^2+w^2}\right]_{0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{w}{a^2+w^2}$$

$$\Rightarrow F_s\left\{e^{-ax}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{-w}{a^2+w^2}$$

www.mohandesyar.com

۲۲- تبدیل کسینوسی وارون تابع e^{-w} را بیابید.

$$F_c^{-1}\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-w}\cos wx\,dw$$

در اینجا $x=b$ و $a=-1$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+c$$

$$F_c^{-1}\{f(w)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{-w}}{1+x^2}\left(-\cos wx+x\sin wx\right)\Big]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(0-\frac{e^0}{1+x^2}(-1)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{1}{1+x^2}$$

۲۳- تبدیل سینوسی وارون $\hat{f}(w)$ را بیابید.

$$F_s^{-1}\{\hat{f}(w)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(w)\sin wx\,dx$$

$$F_s^{-1}\{\hat{f}(w)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{1}{w}-\frac{\cos w\pi}{w}\right)\sin wx\,dw$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin wx}{w}\,dw-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin wx\cos w\pi}{w}\,dw$$

از آنجا که $\int_0^\infty\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$ پس انتگرال روبرو قابل حل است.

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{x\sin wx}{wx}\,dw-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{2w}\left(\sin(x+\pi)w+\sin(x-\pi)w\right)dw$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\,\frac{\sin wx}{wx}\,dw-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{2}\int_0^\infty(x+\pi)\;\frac{\sin(x+\pi)w}{(x+\pi)w}+\frac{\sin(x-\pi)w}{(x-\pi)(w)}(x-\pi)\quad dw$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x\times\frac{\pi}{2}-\frac{(x+\pi)}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{(x-\pi)}{2}\times\frac{\pi}{2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;(x-\pi)$$

$$\Rightarrow F^{-1}\{\hat{f}(w)\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;(x-\pi)$$

www.mohandesyar.com

۲ـ آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\cos x}{x}$ یا $\frac{\sin x}{x}$ موجود است؟

ف: $F_c\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}$ موجود نیست زیرا $\frac{\cos x}{x}$ بطور مطلق انتگرال پذیر نیست، چون در همسایگی راست صفر مانند $\frac{1}{x}$ عمل می‌کند و $\int_0^a \frac{1}{x}\,dx \quad a>0$ واگرا است.

ب: $F_c\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}$ موجود است، زیرا $\frac{\sin x}{x}$ مطلقاً انتگرال پذیر و هموار است.

که انتگرال مقابل در سؤال ۲۸ محاسبه خواهد شد.

$$F_c\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \cos wx}{x}\,dx$$

۲۵ـ تبدیل فوریه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات فوریه بدست آورید.

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\, e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(iw+1)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}\,e^{-(1+iw)x}$$

$$\left[= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}(0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)} \right]$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} e^{x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{x}\cdot e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1-iw)}\,e^{(1-iw)x}\Big]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-(iw-1)x}}{1-iw}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1-iw)}(0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(iw-1)}$$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{۲ix} & ; \ |x|<۱ \\ 0 & ; \ |x| \geqslant ۱ \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left(0 + \int_{-۱}^{۱} e^{۲ix}\, e^{-iwx}\, dx \right)$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-۱}^{۱} e^{i(۲-w)x}\, dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \cdot \frac{۱}{i(۲-w)}\, e^{i(۲-w)x} \Big]_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\ i(۲-w)} \left(e^{i(۲-w)} - e^{-i(۲-w)} \right)$$

$$= \frac{۲\sin(۲-w)}{\sqrt{۲\pi}\ (۲-w)}$$

* توجه: $\left[\left(e^{i(۲-w)} - e^{-i(۲-w)} \right) = ۲i\sin(۱-w) \right]$

---

d) $f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0<x<a \\ 0 & ; \ \text{به‌ازای بقیه مقادیر} \end{cases}$

$$F\{f\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{0}^{a} x\, e^{-iwx}\, dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left[-\frac{x}{iw} - \frac{۱}{(iw)^۲} \right] e^{-iwx} \Big]_{0}^{a}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left[\left[-\frac{a}{iw} - \frac{۱}{(iw)^۲} \right] e^{-iwa} + \frac{۱}{(iw)^۲} \right]$$

۲۶ـ نشان دهید اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد $f(x-a)$ نیز دارای تبدیل فوریه است و ـــ $F\{f(x-a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}$

$F\{f(x)\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$ و $F\{f(x-a)\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, e^{-iw(x-a)}\, d(x-a)$

$u = x-a \qquad x = u+a \qquad dx = du$

$$F\{f(u)\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-iwu}\, e^{-iwa}\, du = \frac{e^{-iwa}}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-iwu}\, du$$

$u \longrightarrow x$

$$\Rightarrow F\{f(x-a)\} = \frac{e^{-iwa}}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = e^{-iwa} F\{f(x)\}$$

www.mohandesyar.com

۲ـ نشان دهید که اگر $\hat{f}(w)$ تبدیل فوریه f باشد آنگاه $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax}f(x)$ است.

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx \quad , \quad \hat{f}(w-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(w-a)x}dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-iwx}e^{iax}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)e^{iax}\right)e^{-iwx}dx = F\left\{f(x)e^{iax}\right\}$$

۲۸ـ انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; |x|<1\\ 0 & ; |x|>1\end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos ax}{x}dx$ را به ازای مقادیر گوناگون a بیابید.

$$f(-x) = f(x) \Longrightarrow b(w) = 0$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(w)\cos wx\,dw \quad , \quad a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx$$

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos wx\,dx + 0 = \frac{2}{\pi w}\sin wx\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi w}\cdot\sin$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos wx\,dx \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos wx}{w}dx = \frac{\pi}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(a) = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & ; |a|<1\\ 0 & ; |a|>1\end{cases}$$

$$\text{if } |a|=1 \Longrightarrow \begin{array}{ll} 1)\ a=1 & \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos x}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{2x}dx = \frac{\pi}{4} \\ 2)\ a=-1 & \int_0^{\infty}\frac{\sin x.\cos(-x)}{x}dx = \frac{\pi}{4}\end{array}$$

www.mohandesyar.com

۲۹- به کمک انتگرال فوریه نشان دهید

$$a)\ \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a} \qquad a>0$$

$$\int_0^\infty \frac{w\sin xw}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x} \qquad x>0 \qquad \int_0^\infty b(w)\sin wx\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\sin wx\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{-x(1-iw)} - e^{-x(1+iw)}\right)dx = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw-1}\,e^{-x(1-iw)}\Big]_0^\infty + \frac{1}{2i}\times\frac{1}{1+iw}e^{-x(1+iw)}\,.$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw-1} - \frac{1}{2i}\,\frac{1}{iw+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{iw-1}+\frac{-1}{iw+1}\right) = \frac{-2iw}{2i(i^2w^2-1)} = \frac{w}{1+w^2} = b(w)$$

$$b)\ \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a} \qquad a\geq 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos wx\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{(e^{iwx}+e^{-iwx})}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-x(1-iw)} + e^{-x(1+iw)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{iw-1}\,e^{-x(1-iw)} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{-x(1+iw)}}{(1+iw)}\,e^{-x(1+iw)}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+iw} = \frac{2}{2}\,\frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{1+w^2}$$

www.mohandesyar.com

۲_ تبدیلات فوریه مختلط از توابع زیر را بیابید:

a) $$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ |x|<\pi \\ 0 & \ |x|>\pi\end{cases}$$

$$F\{f\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{iw\pi}-e^{-iw\pi}}{iw}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{2\sin w\pi}{w}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{\sin w\pi}{w}$$

---

b) $$f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ |x|<x_0 \\ 0 & ; \ |x|>x_0\end{cases}$$

$$F\{f\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x_0}^{x_0} x^2 e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-x^2e^{-iwx}}{iw}+\frac{2xe^{-iwx}}{w^2}+\frac{2e^{-iwx}}{iw^3}\right]_{-x_0}^{x_0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-x_0^2e^{-iwx_0}}{iw}+\frac{2x_0e^{-iwx_0}}{w^2}+\frac{2e^{-iwx_0}}{iw^3}+\frac{x_0^2e^{iwx_0}}{iw}+\frac{2x_0e^{iwx_0}}{w^2}-\frac{2e^{iwx_0}}{iw^3}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{w}\left[x_0^2-\frac{2}{w^2}\right]\sin wx_0+\frac{4x_0}{w^2}\cos wx_0\right]$$

۳۱_ تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & ; \ |x|<1 \\ 0 & ; \ |x|>1\end{cases}$ را بدست آورید و به کمک آن $\int_0^\infty \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\sqrt{2\pi}\;F\{f\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,e^{-iwx}\,dx$$

$$\Rightarrow\sqrt{2\pi}\;F\{f\}=\left[\left(-\frac{1}{iw}(1-x^2)+\frac{2x}{(iw)^2}+\frac{2}{(iw)^3}\right)e^{-iwx}\right]_{-1}^{1}$$

(ادامه در صفحه بعد)

www.mohandesyar.com

ادامه سؤال ۳۱-

$$= \left(\frac{۲}{(iw)^۲} + \frac{۲}{(iw)^۳}\right) e^{-iw} - \left(\frac{۲}{(iw)^۳} - \frac{۲}{(iw)^۲}\right) e^{iw}$$

$$= \frac{۲}{(iw)^۲}\left(e^{-iw} + e^{iw}\right) - \frac{۲}{(iw)^۳}\left(e^{+iw} - e^{-iw}\right) = \frac{۱}{(iw)^۲} \cos w - \frac{۱}{(iw)^۳} i \sin w = -\frac{\cos w}{w^۲} + \frac{۱}{w^۳} \sin w$$

$$\Rightarrow \hat{F}(w) = -\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \frac{w \cos w - \sin w}{w^۳}$$

$$, f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(w) e^{iwx} dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^۳} e^{iwx} dw$$

$$\Rightarrow f(۰) = -\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^۳} dw = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^۳} dw = -۲\pi .$$

$$g(w) = \frac{w \cos w - \sin w}{w^۳} \quad , g(-w) = \frac{-w \cos(-w) - \sin(-w)}{(-w)^۳} = g(w)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(w) dw = -۲\pi \Rightarrow \int_{۰}^{\infty} g(w) dw = \frac{۱}{۲}(-۲\pi) = -\pi$$

۳۲- تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی هریک از توابع زیر را بیابید.

$$a) \; f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \; ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & ; \; x \geq ۱ \end{cases}$$

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{۱} ۱ \times \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \times \frac{۱}{w} \sin wx \Big]_{۰}^{۱} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{\sin w}{w}$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{۱} \sin wx \, dx = -\frac{۱}{w} \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \cos wx \Big]_{۰}^{۱} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{۱ - \cos w}{w}$$

$$b) \; f(x) = e^{-ax} \; (a > ۰) \qquad F_c\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} e^{-ax} \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{e^{-ax}}{a^۲ + w^۲} \left(-a \cos wx + w \sin wx\right)\Big|_{۰}^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_c\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{a}{a^۲ + w^۲}$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} e^{-ax} \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \times \frac{e^{-ax}}{a^۲ + w^۲} \left(-a \sin wx - w \cos wx\right)\Big|_{۰}^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_s\{f\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \left(۰ - \frac{۱}{a^۲ + w^۲}(۰ - w)\right) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \left(\frac{w}{a^۲ + w^۲}\right)$$

www.mohandesyar.com

۲ـ تبدیل فوریه سینوسی تابع $e^{-|x|}$ را بدست آورید و به کمک آن $\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx$ را محاسبه کنید.

$$F_s\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-|x|}\sin wx\,dx \qquad 0\leqslant x\leqslant\infty \Rightarrow |x|=x \Rightarrow F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sin wx\,dx$$

$$2i\sin wx=e^{iwx}-e^{-iwx} \Rightarrow e^{-x}\sin wx=\frac{1}{2i}\left(e^{(iw-1)x}-e^{-(iw+1)x}\right)$$

$$F_s\{f\}=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-1}{(1-iw)}e^{-(1-iw)x}+\frac{1}{(iw+1)}e^{-(iw+1)x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[0-\left(\frac{-1}{1-iw}+\frac{1}{iw+1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow F_s\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{w}{1+w^2}$$

$$F_s^{-1}\{f\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(w)\sin wx\,dw=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}\sin wx\,dw=e^{-|x|}$$

اگر $x=m \Rightarrow \int_0^\infty \frac{w\sin mw}{1+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-|m|}$ و (با تغییر متغیر از w به x نتیجه حاصل می‌شود)

۳۴ـ چنانچه $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای باشد در فاصله $[-\pi,\pi]$ و متناوب با دوره تناوب 2π نیز باشد، آن گاه ثابت کنید توابع زیر نیز دارای چنین خاصیتی هستند.

$$g(x)=f(w+x)\frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(w+x)\}}{2\sin\frac{w}{2}} \quad , n=1,2,3,\dots$$

برهان:
$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{2i\sin(n+\frac{1}{2})x}{2i\sin\frac{x}{2}}=\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}-e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}=$$

$$\frac{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{i(n+1)x}-e^{-inx}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}-1\right)}=\frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1}=\frac{\sum_{k=-n}^{n}e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{e^{ix}-1}$$

$$=\frac{\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}\left(e^{ix}-1\right)}{e^{ix}-1}=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}+e^{-ikx}=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos$$

$D_n(x)$ تابعی پیوسته و متناوب است.

$$\Rightarrow D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

www.mohandesyar.com

$$g(x) = f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin \frac{w}{۲}}$$

* در این برهان ابتدا نشان دهیم : ۱) و پیوسته [illegible] است .   ۲) متناوب است.

$$1)\; g(x) = f(x+w)\, D_n(w+x)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin \frac{w}{۲}} \quad , \quad g(x-w) = f(x) \cdot D_n(x)\, \frac{\sin x/۲}{۲ \sin \frac{w}{۲}}$$

$$\lim g(x) - g(x-w) = \lim\; f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ [illegible]} - f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin x/۲}{۲ \sin w/۲}$$

$$= \lim_{w \to 0^-} \Big[f(x+w)\, D_n(x+w)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin w/۲} - f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin w/۲} + f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin \frac{w}{۲}}$$

$$- D_n(x)\, f(x)\, \frac{\sin x/۲}{۲ \sin w/۲} \Big]$$

$$= \lim_{w \to 0^-} \big(f(x+w)\, D_n(x+w) - f(x)\, D_n(x) \big)\, \frac{\sin \frac{1}{۲}(w+x)}{۲ \sin w/۲} \quad \lim_{w \to 0^-} f(x)\, D_n(x)\, \frac{\sin \frac{w+x}{۲} - \sin \frac{x}{۲}}{۲ \sin x/۲}$$

$$= \underbrace{\lim_{w \to 0^-} \frac{f(x+w)\, D_n(x+w) - f(x)\, D_n(x)}{w} \cdot \frac{w}{۲ \sin w/۲} \cdots (w+x)}_{①} \quad f(x)\, D_n(x) \lim \frac{\sin \frac{w}{۲} \cos(\frac{w}{۲} \cdots)}{۲ \sin \frac{w}{۲}}$$

$\lim_{w \to 0} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ [illegible] ناپیوستگی از نوع نخست ندارد [illegible] ج نقطه‌ای [illegible] است پس [illegible] f پیوسته

$\frac{f(x+ \cdots)}{} \lim_{\to 0^+}$ [illegible] وجود دارند [illegible] در ① و ① [illegible] وجود دارد [illegible] حد و از چپ متناهی است

[illegible] ترتیب [illegible] و [illegible] پیوسته‌ای است [illegible] بیشتر [illegible] که [illegible] تکه‌ای همواره [illegible]
(ذکر [illegible] شده.)

اثبات

۲) [illegible] و [illegible] حاصل [illegible] متناوب [illegible] $\frac{\frac{w+x}{۲}}{\sin \frac{w}{۲}}$ است پس و متناوب

[illegible](اما [illegible] و [illegible])

www.mohandesyar.com

تابع f در نقطه‌ای در نقطه x_0 در شرط لیپ شیتز از مرتبه α صدق می‌کند هرگاه اعداد مثبت M و δ موجود باشند به طوری که $|f(x)-f(x_0)| \leq M|x-x_0|^{\alpha}$ مشروط بر اینکه $|x-x_0|<\delta$. ثابت کنید اگر f پیوسته بوده و در شرط لیپ شیتز در x_0 صدق کند آنگاه سری فوریه f به سمت $f(x_0)$ همگراست.

برهان: $x-x_0=t \Rightarrow x=t+x_0$

$$|t|<\delta \Rightarrow |f(x_0+t)-f(x_0)| \leq M|t|^{\alpha} \quad \text{if} \quad \alpha=1 \Rightarrow |f(x+t)-f(x_0)| \leq M|t|$$

مجموع جزئی n ام سری فوریه f $= S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $c_k=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt$

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{ik(x-t)}\,dt$$

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

* با توجه به تعریف ارائه شده در سؤال ۳۴ داریم:

$$S_n(x)=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x-t \to t=x-u \\ du=-dt \end{array}\right\} \Rightarrow S_n(x)=\frac{1}{۲\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\,D_n(u)\,(-du)=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x-u)\,D_n(u)$$

با توجه به تمرین ۳۲ ص ۵۹ $\int_a^{a+۲p} f(x)\,dx=\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \Rightarrow S_n(x)=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt$

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)D_n(t)\,dt$$

$$, D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}=\frac{\sin(n+\frac{1}{۲})t}{۲\sin\frac{t}{۲}}$$

با توجه به سؤال ۳۴

$$=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(t)}{۲\sin t/۲}\sin(n+\tfrac{1}{۲})t\,dt=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(t)}{۲\sin t/۲}\left(\sin nt\cos t/۲+\cos nt\sin t/۲\right.$$

$$=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{۲\tan\frac{t}{۲}}\sin nt\,dt+\frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)\cos nt\,dt=I_1+I_۲$$

www.mohandesyar.com

ادامه ۳۵ - $\leqslant$

$$|I_۱| \leqslant \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{۲\tan t/۲}\sin nt\right|dt \leqslant \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\sin nt|\,dt \leqslant \frac{Mn}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\sin nt\,dt$$

$$|I_۲| \leqslant \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)||\cos nt|\,dt \leqslant \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M|t||\cos nt|\,dt = \frac{M}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t\cos nt|\,dt$$

$$= \frac{M}{۲\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-t|\cos nt|\,dt + \int_{0}^{\pi}t|\cos nt|\,dt\right]$$

$$|I_۲| \leqslant \frac{M}{۲\pi}\left[\int_{0}^{\pi}t|\cos nt|\,dt - \int_{-\pi}^{0}t|\cos nt|\,dt\right] = \frac{M}{۲\pi}\left[۲n\int_{0}^{\frac{\pi}{۲n}}t\cos nt\,dt - ۲n\int_{-\frac{\pi}{۲n}}^{0}t\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{Mn}{\pi}\left[\left[\left(\frac{t}{n}\sin nt + \frac{۱}{n^۲}\cos nt\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{۲n}} - \left[\left(\frac{t}{n}\sin nt + \frac{۱}{n^۲}\cos nt\right)\right]_{-\frac{\pi}{۲n}}^{0}\right]$$

$$= \frac{Mn}{\pi}\left(\frac{\pi}{۴n^۲} + \frac{\pi}{۴n^۲}\right) = \frac{M}{n}$$

$$|I_۱ + I_۲| \leqslant |I_۱| + |I_۲| = \frac{M}{n} + \frac{M}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nt}{n}\,dt = P(n) \quad \text{in } f \to \infty \Rightarrow P(n) \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|S_n(x) - f(x)| = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$