بسم الله الرحمن الرحیم

مخابرات

(بخش چهارم)

استاد صافی

ساختار دمدولاتورهای FM :

$$x_c(t)=A_c\cos\left(w_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right) \longrightarrow \boxed{\text{دمدولاتور}} \longrightarrow x(t)$$

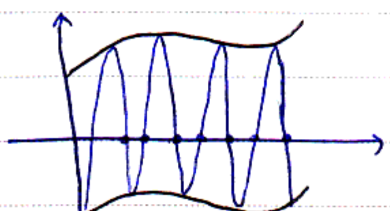
۱- تبدیل FM به AM (مشتق گیر)

$$x'_c(t)=-A_c\left(w_c+2\pi f_\Delta x(t)\right)\sin\left(w_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right)=$$

$$-A_c w_c\left(1+\underbrace{\frac{f_\Delta}{f_c}}_{<1}x(t)\right)$$

می توان $x(t)$ را توسط آشکارساز پوش استخراج کرد.

تفاوت x'_c با یک سیگنال AM فقط در این است که باعث می شود نقاط عبور از صفر در فواصل یکسان قرار نگیرد ولی تاثیری در پوش سیگنال ندارد.



مشکل استفاده از این ساختار این است که در عمل سیگنال مدوله شده با نویز جمع می شود لذا داریم:

$$\underbrace{x_R(t)}_{\text{دریافتی}}=x_c(t)+n(t) \Rightarrow x'_R(t)=x'_c(t)+n'(t)$$

که چون $n(t)$ دارای تغییرات ناگهانی است، $n'(t)$ تاثیرات نامطلوب فراوانی بر دامنه سیگنال خروجی خواهد داشت.

راه حل: سیگنال اصلی را ابتدا از یک محدود کننده عبور می دهیم تا یک پالس مربعی تولید شود و سپس هارمونیک اصلی آن را توسط فیلتر جدا می کنیم که در نتیجه یک سینوسی بدون نویز خواهیم داشت و می توانیم از آن مشتق بگیریم.

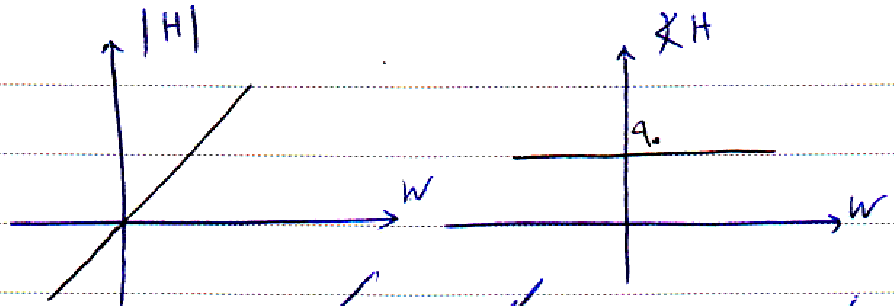
$x_c(t) \longrightarrow$ [محدود کننده] $\longrightarrow$ [BPF] $\longrightarrow$ [d/dt] $\longrightarrow$ [آشکارساز] $\longrightarrow$ [حذف DC] $\longrightarrow x(t)$

denoising — حذف نویز

تابع تبدیل : $H(jw)=jw$

$$|H(jw)| = w$$

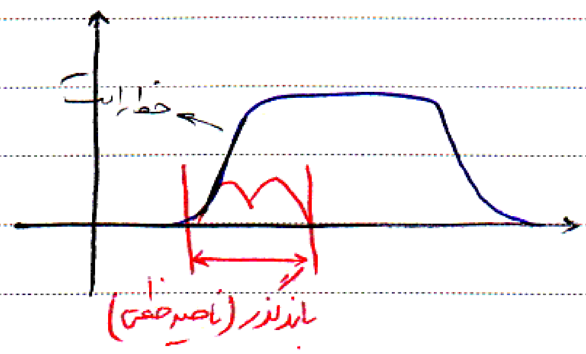
$$\measuredangle H(jw) = \frac{\pi}{2}$$



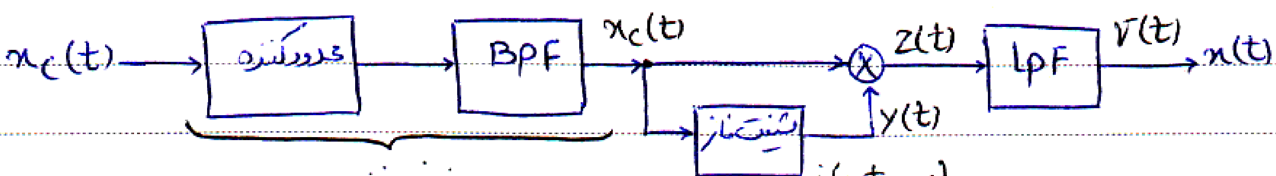
مشکل عملی استفاده از مشتق‌گیر این است که غیرخطی است و لذا علاوه بر سیگنال $x(t)$، سیگنال‌های $x^2(t)$ و $x^3(t)$ و ... نیز در خروجی ایجاد می‌شوند که امکان جداسازی آن‌ها از یکدیگر وجود ندارد.

به عبارت دیگر المانی که در محدوده‌ی وسیعی پاسخ فرکانسی خطی داشته باشد وجود ندارد.

راه‌حل: استفاده از باند گذر یک فیلتر میانگذر



۲- آشکارساز انتقال فاز   phase shift $\underbrace{\text{Discriminator}}_{\text{تمایزگر}}$



$$H(jw) = e^{-j(wt_1+\alpha)}$$

$$|H| = 1$$

$$\measuredangle H = -wt_1 - \alpha$$

$$x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \phi(t)) \qquad \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$$

$$y(t) = A_c\cos\big(\omega_c(t - t_1) + \phi(t - t_1) - \alpha\big)$$

$$z(t) = x_c(t)\,z(t) = A_c^2\cos(\omega_c t + \phi(t))\cos\big(\omega_c(t - t_1) + \phi(t - t_1) - \alpha\big)$$

$$\cos(\omega_c t - \underbrace{\omega_c t_1} + \phi(t_1 - t_1) \underbrace{- \alpha})$$

$$\theta \triangleq -\omega_c t_1 - \alpha \qquad -\omega_c t_1 - \alpha = \theta$$

$$z(t) = A_c^2\cos(\omega_c t + \phi(t))\cos(\omega_c t + \phi(t - t_1) + \theta)$$

$$\Downarrow \quad \cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A + B) + \cos(A - B)\right]$$

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2}\cos\big(\phi(t) - \phi(t - t_1) - \theta\big)$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ انتخاب کنیم داریم:

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2}\sin\left[\phi(t) - \phi(t - t_1)\right]$$

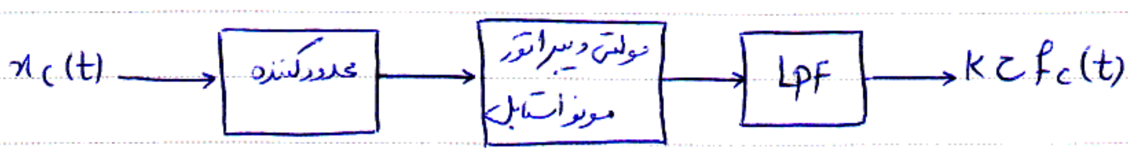
$$\sin x \simeq x \qquad x \to 0$$

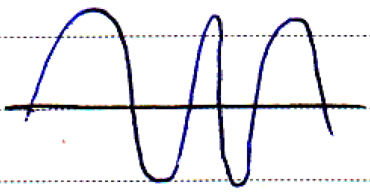
و اگر t_1 به اندازه کافی کوچک باشد:

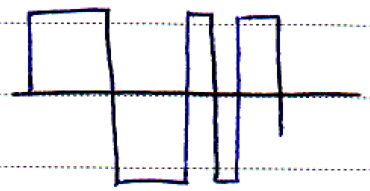
$$v(t) \simeq \frac{A_c^2}{2}\big(\underbrace{\phi(t) - \phi(t - t_1)}\big) \simeq \frac{A_c^2}{2}t_1\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{A_c^2}{2}t_1\big(2\pi f_\Delta\, x(t)\big)$$

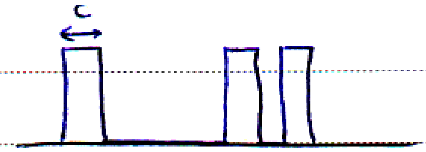
$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \Delta t = t_1 \quad \to t_1\frac{d\phi(t)}{dt}$$

۳- آشکارساز نقاط عبور از صفر (شمارنده نقاط عبور از صفر)









$T_c = \frac{1}{f_c}$

مقدار $D_c = \tau f_c$

$f_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

پروژه مخابرات:

مراحل کار:

۱) تولید سیگنال پیام بصورت یک سینوسی $x(t) = \sin 2\pi f t$

۲) تولید سیگنال حامل بصورت یک سینوسی

```
t = 0 : 0.001 : 1 ; f = 20 ;
x = sin(2*pi*f*t)
plot(t,x)
```

(0.001 = `1e-3`)

۳) تولید سیگنال مدوله شده (AM ، DSB ، FM)

۴) انتقال سیگنال مدوله شده از یک کانال غیرخطی ($y = x^3$)

اکولایزر (تشخیص دادن)

۵) آشکارسازی پیام از سیگنال منتقل شده

z = [000 ----]

z = [1 2 3 4 5 6 7]

z = [0 0 1 2 3 4 5]

ساختار گیرنده های آنالوگ:

کارهایی که گیرنده انجام می دهد:

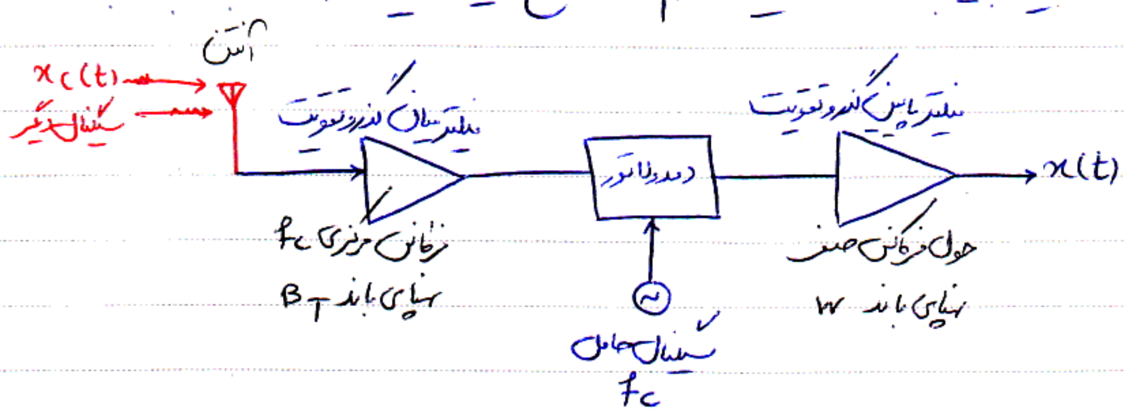
۱) فیلتر کردن به منظور استخراج سیگنال از سایر سیگنال ها

۲) تولید فرکانس حامل به منظور انجام عمل دمدولاسیون

۳) دمدولاسیون جهت استخراج سیگنال پیام

۴) تقویت به منظور جبران سازی تلفات کانال

حداقل بخشی از تقویت باید قبل از دمدولاسیون انجام شود تا سطح سیگنال دریافتی به مقدار قابل قبولی برای دمدولاتور برسد.

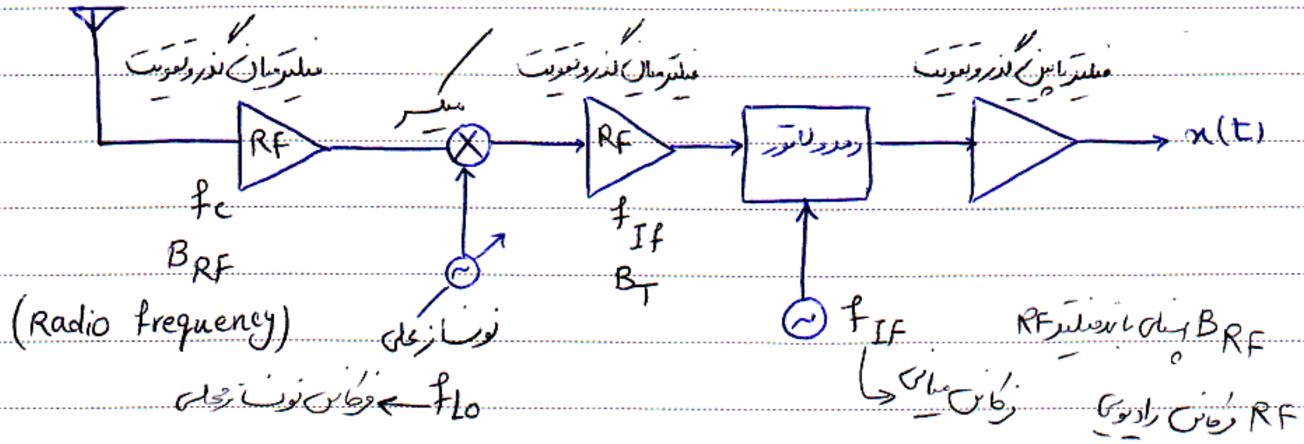


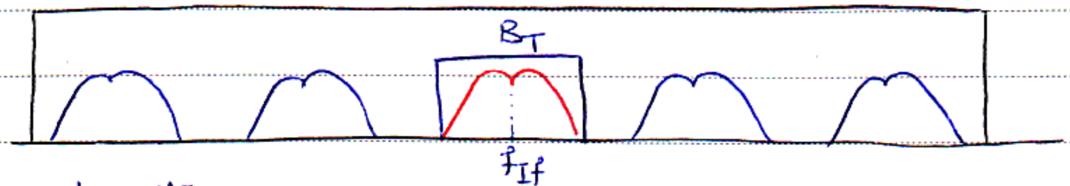
ساختار فوق دارای دو عیب است: ۱- برای فیلتر ورودی نسبت پهنای باند به فرکانس مرکزی بسیار کوچک است و ساخت چنین فیلتری عملاً ممکن نیست.

$$Q = \frac{B}{f_0} = \frac{200k}{100M} = 2m$$

۲- برای دریافت کانال های دیگر باید ساختار فیلتر ورودی و نوسان ساز تولید کننده فرکانس حامل را مرتباً تغییر دهیم.

راه حل: گیرنده سوپرهتروداین





$f_{IF} = 10$ MHZ

$f_{Lo} = 90 \xrightarrow{\text{تغییر کند}} 92$

$f_c = 100 \xrightarrow{\text{تغییر کند}} 102$

در این جا فیلتر ورودی پهنای باند بزرگی دارد و علاوه بر سیگنال پیام، کانال های مجاور را نیز عبور می دهد.

ابتدا میکسر و نوسان ساز محلی عمل انتقال فرکانسی را انجام داده و سیگنال مطلوب در باند رادیویی (RF) را به باند (IF) منتقل می کند. $(f_{IF} < f_{RF})$ پس فیلتر میانی سیگنال مطلوب را که حول f_{IF} قرار گرفته است عبور داده و کانال های مجاور را حذف می کند و خروجی آن به دمدولاتور رفته و پیام بازیابی می شود.

$$f_c - f_{Lo} = \pm f_{IF}$$

* برخلاف ساختار گیرنده سوپرهتروداین بسته به مقدار f_{LO} یک کانال را حول f_{IF} منتقل کرده و دمدولاتور فقط حول این فرکانس ثابت کار می کند

* پهنای باند فیلتر ورودی زیاد است و در نتیجه پیاده سازی آن عملاً امکان پذیر است همچنین فیلتر میانی فرکانس مرکزی پایینی دارد و لذا قابل پیاده سازی است.

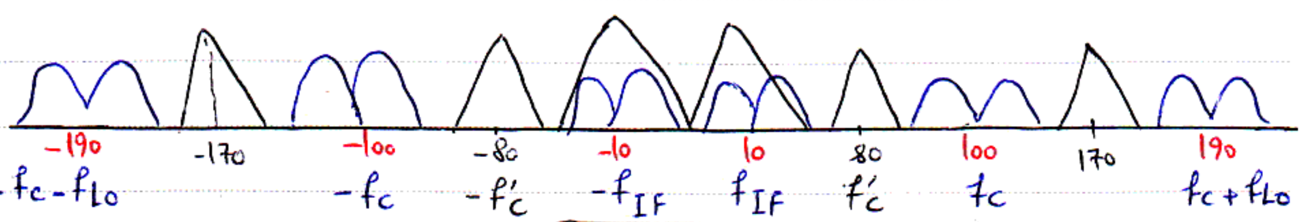
* فیلتر ورودی که در فرکانس های بالا کار می کند بهره ی پایینی دارد تا پایداری حفظ شود و بیشتر تقویت در فرکانس میانی صورت می گیرد.

$$f_c - f_{LO} = \pm f_{IF} \longrightarrow f_{LO} = f_c \pm f_{IF}$$

$$f_{IF} = \left| f_c - f_{LO} \right|$$

* فرکانس نوسان ساز محلی برابر $f_{LO} = f_c \pm f_{IF}$ است و لذا داریم:

فرض: $f_{LO} = f_c - f_{IF}$



$\boxed{\begin{matrix} -f_c+f_{LO} \\ f_c'-f_{LO} \end{matrix}}$ $\quad \begin{matrix} f_c-f_{LO} \\ -f_c'-f_{LO} \end{matrix}$

$$\frac{B_{RF}}{2} = \frac{f_c - f_c'}{2}$$

$$f_c' = -f_c + 2f_{LO} = -f_c + 2(f_c - f_{IF}) = f_c - 2f_{IF}$$

حداکثر پهنای باند $\Leftarrow B_{RF} = f_c - (f_c - 2f_{IF}) = 2f_{IF}$

مشکلی که در استفاده از میکسر وجود دارد حضور طیف سیگنال دیگری به نام سیگنال تصویر (Image) است

که این طیف نیز به فرکانس میانی منتقل می‌شود و لذا توسط فیلتر ورودی باید حذف شود به عنوان مثال اگر :

$f_{LO} = f_c - f_{IF}$ باشد داریم : $\left\{ -f_{IF} = f'_c - f_{LO} \;,\; f_{IF} = f_c - f_{LO} \right\}$

$$\Downarrow$$

$$f'_c = f_c - 2f_{IF}$$

و لذا پهنای باند فیلتر ورودی باید به گونه‌ای باشد که فرکانس تصویر را حذف کند در نتیجه داریم : $B_T < B_{RF} < 2F_{IF}$

تمرین) اگر در گیرنده‌ی سوپرهترودایِن فرکانس نوسان ساز محلی از رابطه‌ی $f_{LO} = f_c + f_{IF}$ به دست آید پهنای باند فیلتر ورودی را به گونه‌ای تعیین کنید که فرکانس تصویر حذف شود.

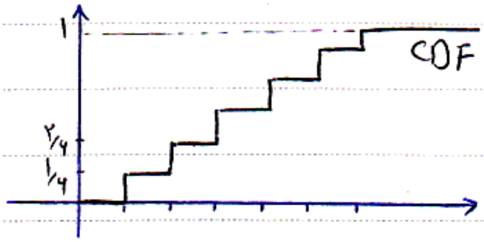
متغیرهای تصادفی : فصل ۴ (یادآوری) S فضای نمونه

متغیر تصادفی تابعی است که نتایج فضای نمونه S در یک آزمایش را به تعدادی عدد نسبت می‌دهد، به عبارتی دیگر اگر S نماینده‌ی نقاط فضای نمونه S باشد متغیر تصادفی $X(S)$ تابعی است که به هر نقطه‌ی S عدد حقیقی x را نسبت می‌دهد، اگر فضای نمونه (S) تعداد متناهی نقاط داشته باشد $X(S)$ را متغیر تصادفی گسسته و اگر تعداد نامتناهی نقاط داشته باشد، $X(S)$ را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم. بدین ترتیب $x=a$ و $x \leq a$ که در آن‌ها a نقطه‌ای بر روی محور حقیقی است را می‌توان بررسی کنیم.

تابع احتمال اینکه $P(X \leq x)$ را تابع توزیع انباره یا (CDF) می‌نامیم و با $F_X(x)$ نمایش می‌دهیم :

$\boxed{F_X(x) = p(X \le x)}$ $\Longrightarrow$ تابع توزیع انباره یا CDF

$F_X(0)=0$ $\quad F_X(0.5)=0$ $\quad F_X(1)=\frac{1}{6}$ $\quad F_X(1.5)=\frac{1}{6}$ $\quad F_X(5)=\frac{5}{6}$ $\quad F_X(6)=1$



CDF بیانگر احتمالی است که در شکل زیر محدود می‌شود.

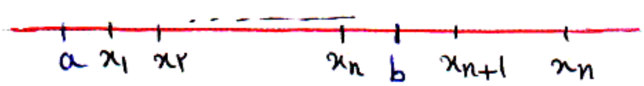
$0 \le F_X(x) \le 1$ $\qquad F_X(-\infty)=0$, $F_X(\infty)=1$

همچنین داریم: $p(a<X\le b) = F_X(b) - F_X(a)$, $(b>a)$

برای یک متغیر تصادفی گسسته که به مقادیر متمایز $x_1, x_2, \dots, x_N$ محدود می‌شود تابع فراوانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تابع فراوانی $P_X(x_i) = p(X = x_i)$

$i=1 \to N$



لذا داریم: $a \le x_1$, $x_n \le b \le x_{n+1}$

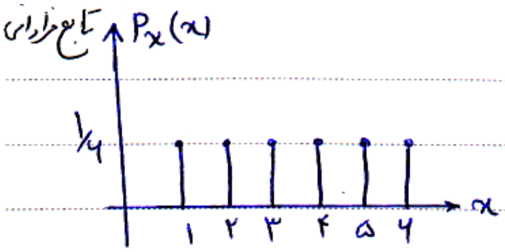
$p(a \le X < b) = p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_n) =$

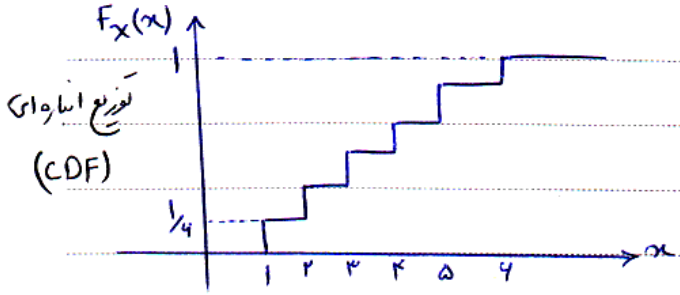
$P_X(x_1) + P_X(x_2) + \dots + P_X(x_n) = \sum_{k=1}^{n} P_X(x_k) = F_X(b) - F_X(a)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) & x_n < x < x_{n+1} \\ 1 & x > x_N \end{cases}$$

بنابراین با تغییر x از $-\infty$ تا ∞، $F_X(x)$ یک تابع پلکانی است که از پله‌هایی با ارتفاع $P_X(x_i)$ در نقاط $x = x_i$ تشکیل شده است. CDF در فاصله‌های بین پله‌ها ثابت است.

$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P_X(x_i)$





$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) & x_n\le x<x_{n+1} \\ 1 & x\ge x_N \end{cases}$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته تعداد نقاط فضا نامتناهی است و لذا احتمال وقوع هر نقطه برابر صفر است.

$(P(X=a)=0)$ ولی پیشامدهای $X\le a$ ، $a<X\le b$ قابل محاسبه هستند.

تابع توزیع انباره‌ای CDF

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} P_X(\lambda)\,d\lambda$$

تابع چگالی احتمال PDF

$$P_X(\lambda)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

خواص تابع PDF :

همواره $P_X(x)\ge 0$ چون احتمال منفی نداریم.

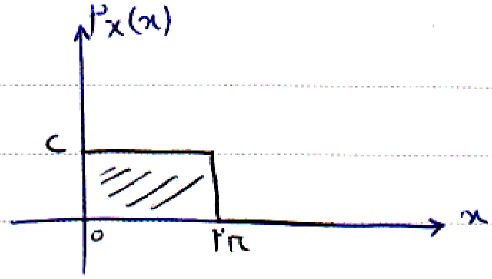
$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\,dx=1$$

$$P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a)=\int_a^b P_X(x)\,dx$$

تابع چگالی احتمال یکنواخت : چنانچه $P_X(x)$ به ازای کلیه نقاط در یک فاصله‌ی محدود مقدار ثابتی داشته باشد و در سایر

PDF

نقاط ضعف یادداشت دارم :



فرض : x زاویه یک بردار در حال چرخش در یک

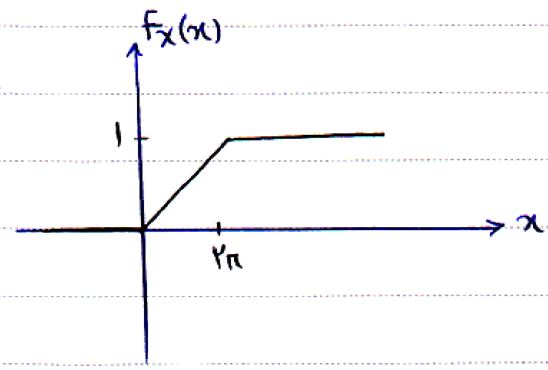
لحظهٔ تصادفی $\qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

مساحت زیر نمودار

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\,dx = 2\pi c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2\pi}}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{سایر نقاط} \\ \frac{1}{2\pi} & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases}$$



$$0 \leq x \leq 2\pi \longrightarrow P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{x}{2\pi}$$

میانگین های آماری :

- میانگین متغیر تصادفی x (m_x) : مقدار متوسط مقادیر متفاوت x با احتمال هر یک از آن ها وزن دار شده باشد. (امید ریاضی)

گسسته :

امید ریاضی

$$m_x = \overline{x} = E[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i P_X(x_i)$$

احتمالی

پیوسته :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x P_X(x)\,dx$$

PDF

امید ریاضی $E[x^n] = \overline{x^n}$ را گشتاور n ام متغیر تصادفی x می گوییم.

گشتاور اول همان مقدار میانگین است. $E[x]$

گشتاور دوم $E[x^2]=\overline{x^2}$ را میانگین مربعی x می‌نامیم، با مربع میانگین $E^2[x]=\bar{x}^2$ تفاوت دارد

مثال) $E[\alpha x+\beta]=\alpha E[x]+\beta=\alpha\bar{x}+\beta$

$$E[\bar{x}x]=\bar{x}\underbrace{E[x]}_{\bar{x}}=\bar{x}^2$$

- انحراف معیار (انحراف میانگین) (σ_x): ملاکی برای پراکندگی مقادیر مشاهده شده X نسبت به m_x است.

واریانس $\quad \sigma_x^2 \triangleq E\left[(x-m_x)^2\right]$

$$\sigma_x^2=E\left[x^2-2m_x x+m_x^2\right]=E[x^2]-2m_x\underbrace{E[x]}_{m_x}+m_x^2=E[x^2]-m_x^2$$

واریانس برابر است با میانگین مربعی منهای مربع میانگین.

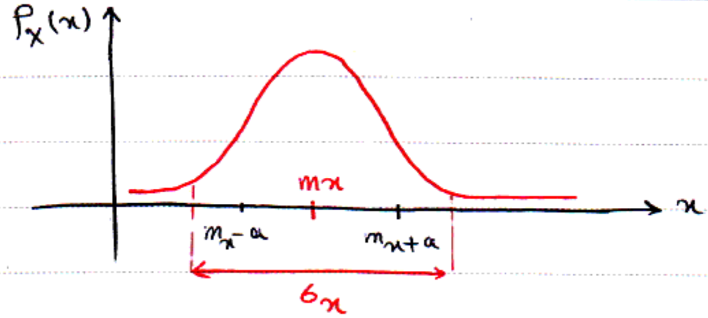
انحراف معیار جذر واریانس است.

تابع چگالی احتمال گاوسی (نرمال) یا (PDF گاوسی)

متغیر تصادفی گاوسی دارای PDF به صورت زیر است:

$$P_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

که در آن m_x و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس متغیر تصادفی X هستند.



$$P(x \leq m_x - a) = P(x \geq m_x + a)$$

$$P(x \leq m_x) = P(x \geq m_x) = \frac{1}{2}$$

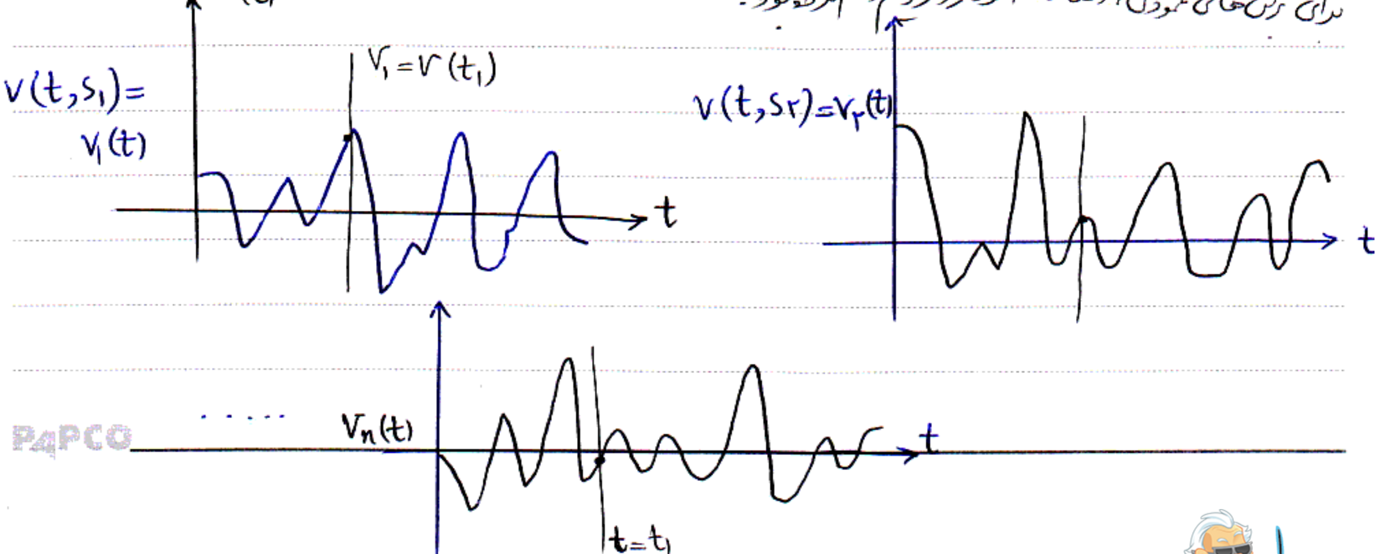
فصل هفتم : فرآیندهای تصادفی و نویز

متغیر تصادفی : نتایج آزمایش را به صورت اعداد در امتداد محور حقیقی می‌نگارد. $x(s) \longrightarrow x$

فرآیند تصادفی : نتایج آزمایش را به صورت توابعی از زمان می‌نگارد. $v(t,s) \longrightarrow v(t)$

مثال) در دماهای بالای صفر درجه کلوین، انرژی جنبشی مولکولی باعث ایجاد ولتاژ نویز در دو سر هر مقاومت می‌شود. اگر تعداد زیادی مقاومت داشته باشیم و در طیفی از زمان‌ها شکل موج دو سر آن‌ها را مشاهده کنیم یک فرآیند تصادفی خواهیم داشت.

برای برش‌های عمودی، استاد سه نمودار را از هم رسم کرده بود.



$X(S) \leftarrow$ یک مقاومت را n بار یا n مقاومت را یک بار مشاهده می‌کردیم. $n \to \infty$

$V(t,S) \leftarrow$ n مقاومت را m بار مشاهده می‌کنیم. $n, m \to \infty$

نکته: هر برش زمانی یک متغیر تصادفی است. $\qquad V_1 = V(t_1)$: متغیر تصادفی

میانگین فرآیند تصادفی $V(t)$: $\qquad \overline{V(t)} = E\left[V(t)\right]$

میانگینی است که با متوسط‌گیری از (∞) توابع در زمان t به دست می‌آید. (میانگین نمودارها)

نکته: میانگین $V(t)$ در $t=t_1$ برابر : میانگین متغیر تصادفی V_1 است.

$$\overline{V(t_1)} = m_{V_1} = E\left[V_1\right] = \overline{V_1}$$

$$V_1 = V(t_1)$$

تابع خودهمبستگی، $R_V(t_1, t_2)$:
به این معنی که یک فرآیند چقدر به خودش شبیه است.

$$R_V(t_1, t_2) \triangleq E\left[V(t_1)V(t_2)\right]$$

تابع خودهمبستگی معیاری برای میزان وابستگی بین V_1 و V_2 است.

$$R_V(t_1, t_2) = E\left[V(t_1)\,V(t_2)\right] \xrightarrow[\text{مستقل باشند}]{\text{اگر } V_1 \text{ و } V_2} E\left[V(t_1)\right]E\left[V(t_2)\right] = \overline{V(t_1)}\;\overline{V(t_2)} =$$

$$m_{V_1}\, m_{V_2}$$

اگر $t_1 = t_2 = t$ باشد داریم:

$$R_V(t,t) = E\left[V^2(t)\right] = \overline{V^2(t)} \quad \text{میانگین مربعی}$$

- تابع همبستگی دو فرآیند تصادفی:

$$R_{VW}(t_1,t_2) \triangleq E\left[v(t_1)\,w(t_2)\right]$$

ملاکی برای بیان وابستگی بین دو فرآیند تصادفی است.

نکته: اگر برای تمام زمان‌های t_1, t_2 داشته باشیم:

$$R_{VW}(t_1,t_2) = \overline{v(t_1)}\;\overline{w(t_2)}$$

دو فرآیند $v(t)$, $w(t)$ را ناهمبسته گوییم.

نکته: اغلب فرآیند تصادفی را می‌توان که بصورت تابعی از یک متغیر تصادفی بیان کرد.

فرآیند تصادفی $v(t) = g(x,t)$ ← متغیر تصادفی

به عبارت دیگر داریم:

متغیر تصادفی $V_i = g(x, t_i)$

اگر PDF متغیر تصادفی x را با $p_X(x)$ نمایش دهیم:

$$\overline{x} = E[x] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_X(x)\,dx$$

$$\overline{v(t)} = E\left[g(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\,p_X(x)\,dx$$

$$R_V(t_1,t_2) = E\left[v(t_1)v(t_2)\right] = E\left[g(x,t_1)\,g(x,t_2)\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t_1)\,g(x,t_2)\,p_X(x)\,dx$$

مهم — مثال) اگر

فرآیند تصادفی $\begin{cases} v(t) = t + x \\ w(t) = t\,y \end{cases}$ متغیر تصادفی $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$

میانگین:

$$\overline{V(t)} = E[t+x] = t + E[x] = t + m_x$$

$$\overline{W(t)} = E[tY] = t\,E[Y] = t\,m_y$$

خود همبستگی:

$$R_V(t_1,t_2) = E[V(t_1)V(t_2)] = E[(t_1+x)(t_2+x)] = t_1t_2 + (t_1+t_2)E[x] + E[x^2]$$

$$R_W(t_1,t_2) = E[W(t_1)W(t_2)] = E[t_1 Y t_2 Y] = t_1 t_2 E[Y^2]$$

تابع همبستگی ←

$$R_{VW}(t_1,t_2) = E[V(t_1)W(t_2)] = E[(t_1+x)(t_2 Y)] =$$

$$t_1t_2E[Y] + t_2E[xY]$$

اگر x و Y مستقل باشند داریم:

$$E[xY] = E[x]E[Y]$$

$$R_{VW}(t_1,t_2) = t_1t_2E[Y] + t_2E[x]E[Y]$$

$$(t_1 + E[x])(t_2E[Y]) = \overline{V(t_1)}\,\overline{W(t_2)}$$

V و W ناهمبسته هستند.

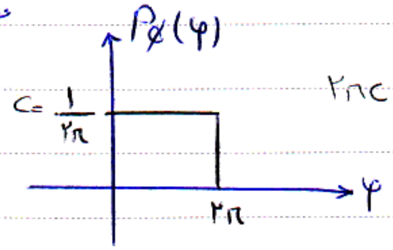
تمرین) اگر $V(t) = X + 3t$ باشد و X متغیر تصادفی با $\bar{x} = 0$ و $\overline{x^2} = 5$ باشد مطلوبست

تعیین $\overline{V(t)}$، $R_V(t_1,t_2)$ و $\overline{V^2(t)}$؟

مثال) موج سینوسی با فاز تصادفی :

فرآیند تصادفی $\quad v(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$\phi \longrightarrow$ متغیر تصادفی



$2\pi c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{2\pi}$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \implies P_\phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\overline{v(t)} = E\big[v(t)\big] = A\,E\big[\cos(\omega t + \varphi)\big] = 0$$

$$E\big[\cos(\omega t + \phi)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \phi) P_\phi(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi)\, d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sin(\omega t + \varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad * \; E\big[\cos(\omega t + \phi)\big]_0^{2\pi} = 0 \longrightarrow \text{حفظ شود}$$

تابع خودهمبستگی $\quad R_v(t_1, t_2) = E\big[v(t_1)\, v(t_2)\big] = A^2 E\big[\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)\big] =$

$$\frac{A^2}{2}\Big(E\big[\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi)\big]^{\to 0} + \underbrace{E\big[\cos\omega(t_1 - t_2)\big]}\Big) = \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2)$$

با رابطه *

در این جا cos ای ها هم فاز نیستند پس مقدار میانگین صفر می‌شود.

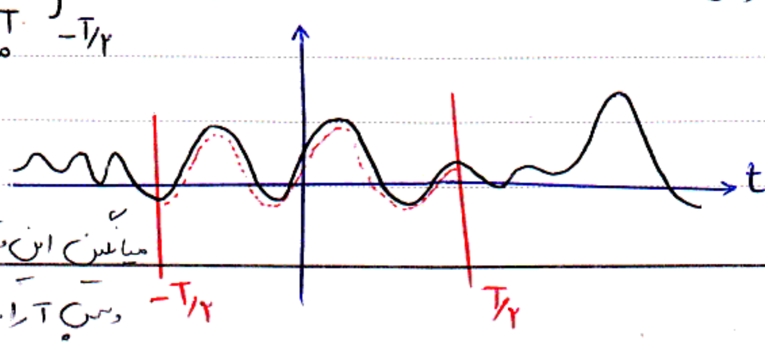
در این جا همه cos ای ها هم فازند پس میانگینشان غیر از صفر می‌شود

$$R_v(t, t) = \frac{A^2}{2}\cos(t - t) = \frac{A^2}{2} = E\big[v^2(t)\big] = \overline{v^2(t)}$$

میانگین مربعی مقداری ثابت است.

میانگین های زمانی :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$



میانگین این قسمت را حساب کرده

و بعد T را به سمت ∞ میل می‌دهیم.

برای $V_i(t) = A\cos(\omega t+\phi)$ داریم : $\langle A\cos(\omega t+\phi)\rangle = 0$

$$\langle V_i^2(t)\rangle = \langle A^2 \cos^2(\underbrace{\omega t+\phi}_{\text{تفکیک مهاشه}})\rangle = \frac{A^2}{2}$$

مشاهده می‌شود که متوسطهای زمانی و آماری با هم برابر شدند.

شرط ارگودیک بودن
$$\begin{cases} \underset{\text{زمانی}}{\langle V(t)\rangle} = \underset{\text{آماری}}{\overline{V(t)}} = 0 \\ \langle V^2(t)\rangle = \overline{V^2(t)} = \frac{A^2}{2} \end{cases}$$

فرایند تصادفی ارگودیک : فرایندی است که تمام متوسط‌های زمانی هر تابع آن با متوسط‌های متناظر آماری آن برابر باشد.

متوسط‌گیری زمانی فقط روی یک تابع صورت می‌گیرد ولی متوسط‌گیری آماری روی تمام توابع. به عبارت دیگر در فرایندهای ارگودیک یک تابع زمانی را می‌توان به‌عنوان نماینده کل فرایند در نظر گرفت.

نکته : تمام متوسط‌های آماری یک فرایند ارگودیک مستقل از زمان هستند. (استاتیک دارند)

اثبات ارگودیک بودن یک فرایند غیرممکن است زیرا باید تمام متوسط‌های آماری و زمانی را محاسبه کنیم. به جای ارگودیک بودن یک شرط ساده‌تر را در نظر می‌گیریم :

فرایند تصادفی ایستا (ساکن) اکید : فرایندی است که تمام متوسط‌های آماری آن مستقل از هم باشند. (SSS)

فرایند تصادفی ایستای غیراکید (WSS) : فرایندی است که $E[V(t)]$ ① مستقل از زمان باشد و

تابع خودهمبستگی آن فقط به $t_1 - t_2$ بستگی داشته باشد.

② $R_V(t_1,t_2)$ ← مستقل از زمان باشد.

برای فرآیندهای WSS داریم:

$E[v(t)] = m_v$ $\quad R_v(t_1,t_2) = R_v(t_1 - t_2) \xrightarrow[t_1=t,\ t_2=t]{t_1-t_2=\tau}$

$$R_v(\tau) = E[v(t)v(t+\tau)] = E[v(t)v(t-\tau)]$$

ویژگی‌های $R_v(\tau)$:

1) $R_v(\tau) = R_v(-\tau)$ اثبات: در رابطه‌ی بالا $t=0$ می‌گذاریم.

2) $R_v(0) = \overline{v^2(t)} = \sigma_v^2 + m_v^2$

3) $|R_v(\tau)| \le R_v(0)$

← حالت همزمانی اتفاق می‌افتد که تابع متناوب باشد.

نتیجه: تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)$ یک فرآیند WSS، حول مقدار ماکزیمم خود در $\tau=0$ تقارن زوج دارد.

برای مثال قبل داریم:

$$E[v(t)] = 0$$

$$R_v(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\cos w(t_1 - t_2) \Rightarrow R_v(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos w(\tau)$$

در نتیجه سینوسی با فاز تصادفی یک فرآیند WSS است.

فرآیند تصادفی گاوسی: فرآیندی است که تمام توابع چگالی احتمال آن گاوسی باشند.

خواص فرآیندهای گاوسی:

$E[v(t_1)] \longrightarrow m_v$

۱) فرآیند توسط $E[v(t)]$ و $R_v(t_1,t_2)$ کامل توصیف می‌شود.

$E[v^2(t_1)] = \sigma_v^2 + \overline{v(t)}^2 \longrightarrow \sigma_v^2$

۲) اگر $R_v(t_1,t_2) = E[v(t_1)]E[v(t_2)]$ آنگاه $v(t_1)$ و $v(t_2)$ ناهمبسته و مستقل آماری هستند.

مهم ۳) اگر $v(t)$ ایستای عمومی باشد آنگاه ایستای اکید و ارگودیک نیز هست.

۴) هر عمل خطی روی $v(t)$ یک فرآیند گاوسی ایجاد می‌کند.

سیگنال های تصادفی: طیف توان $G_v(f)$، نمایشی از توزیع توان متوسط در حوزه فرکانس است.

قضیه: برای سیگنال های تصادفی ایستا، طیف توان از تبدیل فوریه تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)$ بدست می‌آید.

$$G_v(f) = F\{R_v(\tau)\} \longrightarrow$$ برای سیگنال های تصادفی ایستا

طیف توان

خواص $G_v(f)$:

۱) توان متوسط $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\,df = R_v(0) = \overline{v^2(t)}$

عکس تبدیل فوریه $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, e^{-j2\pi f\tau}\, df = R_v(\tau)$

۲) $G_v(f) \geq 0$

۳) حقیقی $R_v(\tau) \Longrightarrow G_v(-f) = G_v(f)$

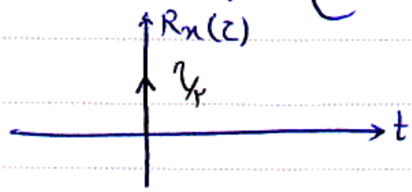
برای مثال می‌دانیم: $R_v(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f\tau$

$$\Rightarrow R_V(f) = \frac{A^2}{4}\,\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\,\delta(f+f_0)$$

فصل ۸:

فرایند نویز سفید: فرایندی است ایستا که تابع خودهمبستگی آن برابر است با:

$$R_x(\tau) = \frac{\eta}{2}\,\delta(t)$$

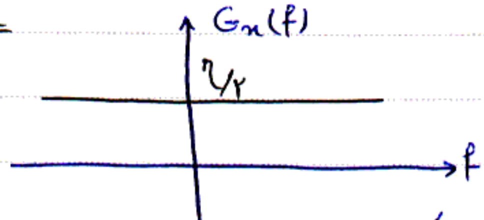


ما روش می‌گوییم نویز سفید

چون تمام فرکانس‌ها را در برمی‌گیرد

صدای آبشار، صدای برفک تلویزیون

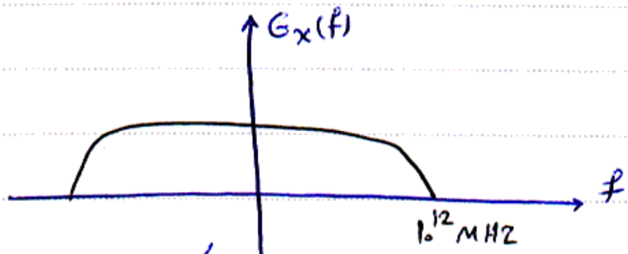
طیف توان نویز سفید $G_x(f) = \frac{\eta}{2}$



η بستگی به نوع نویز دارد. (در تجهیزات الکترونیکی معمولاً با نویز حرارتی روبرو هستیم.)

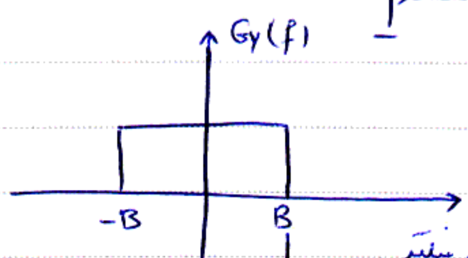
نویز حرارتی = نویز سفید

طیف توان نویز حرارتی:



نویز حرارتی را می‌توان یک نویز سفید گاوسی با میانگین صفر و چگالی طیف توان $\frac{\eta}{2}$ در نظر گرفت.

نویز پایین گذر: چنانچه نویز سفید از یک LPF ایده‌آل عبور کند داریم:

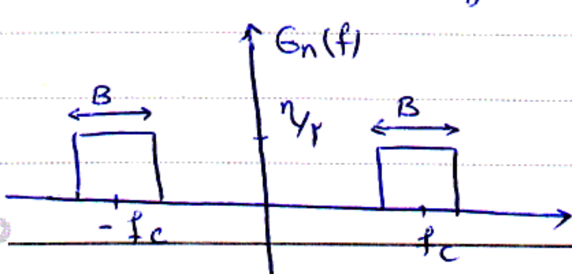


پهنای باند فیلتر

$$G_y(f) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

توان متوسط $= \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\,df = \eta B \Leftarrow$ مساحت زیر نمودار

نویز میان گذر:



سیگنال نویز

$n(t) = A_n(t)\cos(\omega_c t + \phi_n(t))$

$n_i(t) = A_n(t)\cos\phi_n(t)$

$n_q(t) = A_n(t)\sin\phi_n(t)$

هم‌فاز — ربعی

$n(t) = n_i(t)\cos\omega_c t + n_q(t)\sin\omega_c t$

$A_n(t) = \sqrt{n_i^2(t) + n_q^2(t)}$ $\qquad \phi_n(t) = tg^{-1}\dfrac{n_q(t)}{n_i(t)}$

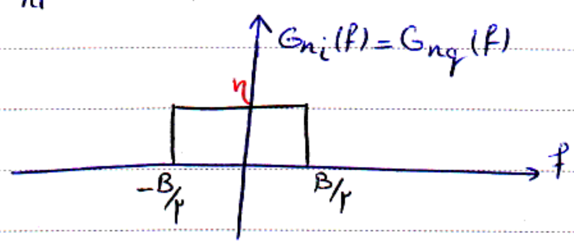
برای فرآیندهای تصادفی $n_i(t)$ و $n_q(t)$ داریم:

۱) اگر $n(t)$ فرآیند گاوسی و ایستا (WSS) باشد، $n_i(t)$ و $n_q(t)$ نیز گاوسی و ایستا هستند.

۲) اگر $\overline{n(t)}$ صفر باشد، $\overline{n_i(t)}$ و $\overline{n_q(t)}$ نیز صفر هستند.

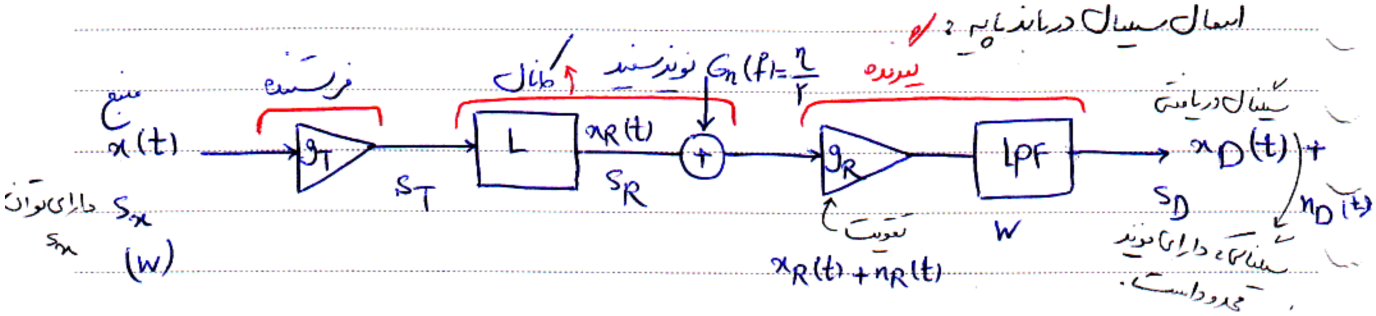
۳) طیف توان $n_i(t)$ و $n_q(t)$ به صورت زیر است،

$$G_{n_q}(f) = G_{n_i}(f) = G_n(f+f_c)\,u(f+f_c) + G_n(f-f_c)\,(1-u(f-f_c))$$



۴) $n_i(t)$ و $n_q(t)$ از هم مستقل هستند.

انتقال سیگنال در باند پایه:



هدف ما بررسی SNR خروجی است (SNRD)

هدف : $SNR_D = \frac{S_D}{N_D}$

بهره توان : g_T ، g_R ① $S_T = g_T S_x$ ② $S_R = \frac{S_T}{L}$

③ $S_D = g_R S_R$ ①,②,③ $\Rightarrow$ $S_D = \underbrace{\frac{g_T g_R}{L} S_x}_{\text{برحسب } S_x} = \underbrace{\frac{g_R}{L} S_T}_{\text{برحسب } S_T} = \underbrace{g_R S_R}_{\text{برحسب } S_R}$

$\boxed{N_D = g_R \eta W}$

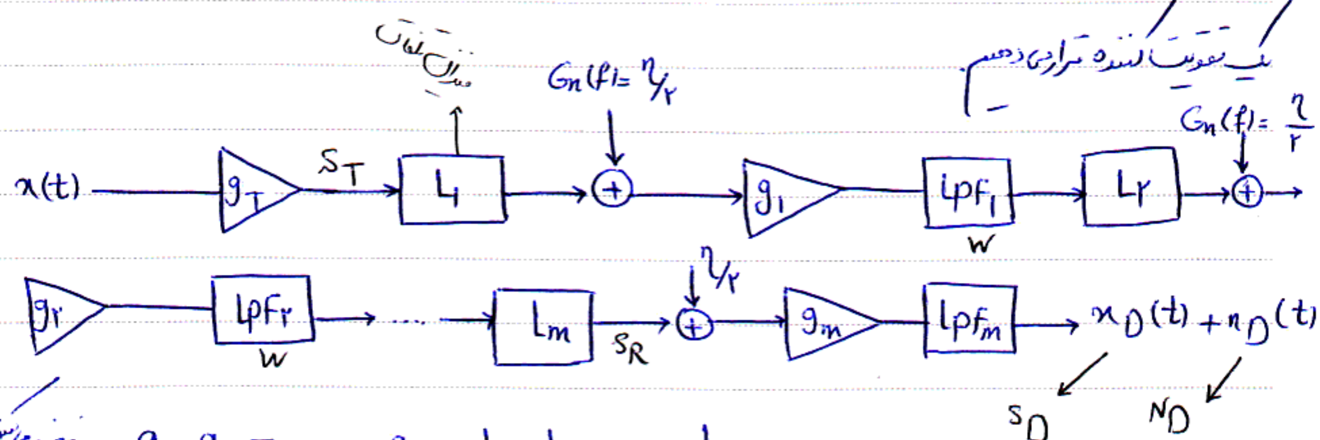
نکته : می‌توان از g_R صرف نظر کرد، چون هم سیگنال و هم نویز را به یک اندازه تقویت می‌کند.

$$\boxed{SNR = \frac{\cancel{g_R} S_R}{\cancel{g_R} \eta W} = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma}$$

$$SNR_D = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma = \frac{S_T}{L \eta W}$$

مشکل ساختار فوق این است که با افزایش طول مسیر، L به شدت افزایش یافته و SNR بسیار کم می‌شود.

راه حل : استفاده از تکرار کننده ها. مسیر انتقال را به m قطعه مساوی با اتلاف L_1 تقسیم می‌کنیم و در انتهای هر قطعه یک تقویت کننده قرار می‌دهیم



فرض می‌کنیم : $g_1 = g_2 = \dots = g_m = L_1 = L_2 = \dots = L_m$

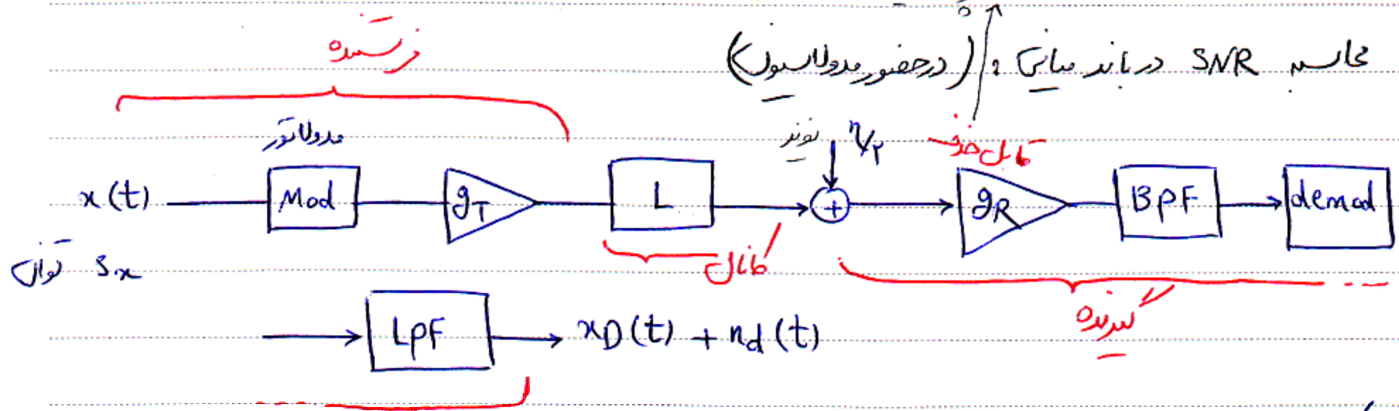
$S_D = S_T$ $\qquad N_D = g_1 \eta W + g_2 \eta W + \cdots + g_m \eta W = m g_1 \eta W = m L_1 \eta W$

کانال $L = L_1 \cdot L_2 \cdots L_m = L_1^m$

$$SNR_D = \frac{S_T \times L}{m L_1 \eta W \times L} = \frac{L}{m L_1} \times \frac{S_T}{L \eta W} = \frac{(L_1)^{m-1}}{m}\gamma$$

چون سیگنال و نویز را به یک اندازه تقویت می‌کند

محاسبه SNR در باند میانی: (در حضور مدولاسیون)



اگر ورودی دمدولاتور بصورت $v(t) = A_r(t)\cos(w_c t + \phi_r(t))$ یا $v(t) = v_i(t)\cos w_c t + v_q(t)\sin w_c t$

باشد هر یک از دمدولاتورها یکی از ۴ حالت زیر خواهد بود:

(مولفه هم فاز) ضریب Cos

DSB: $v_i(t)$ $\qquad x(t) \rightarrow \boxed{\text{mod}} \rightarrow A_c x(t)\cos w_c t \rightarrow \boxed{\text{دمدولاتور}} \rightarrow x(t)$

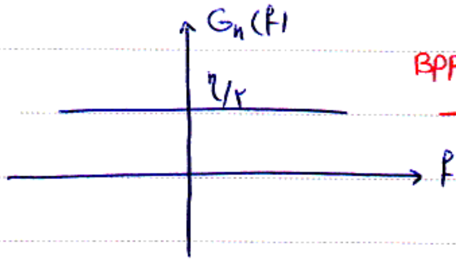
ضریب Cos

AM: $A_r(t) - \overline{A_r(t)}$ $\qquad$ پوش منهای میانگین پوش

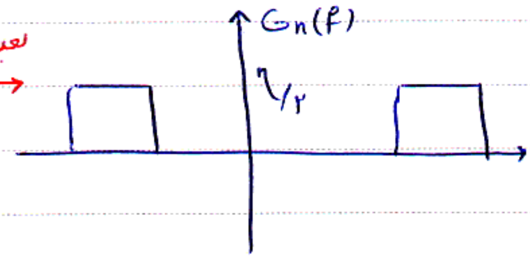
PM: $\phi_r(t)$ $\qquad$ فاز

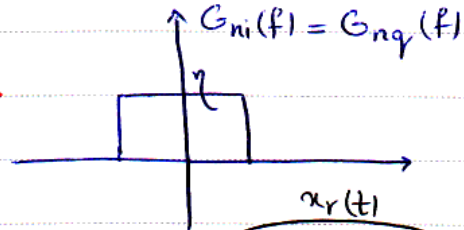
FM: $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\phi_r(t)}{dt}$ $\qquad$ مشتق فاز

محاسبه SNR برای مدولاسیون DSB :



بعد از عبور BPF





آشکارساز DSB همان آشکارساز هم‌زمان است.

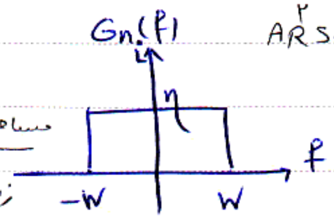
ورودی دمدولاتور : $\overbrace{A_R x(t)\cos w_c t}^{x_r(t)} + \overbrace{n_i(t)\cos w_c t + n_q(t)\sin w_c t}^{\text{نویز}} =$

$(A_R x(t) + n_i(t))\cos w_c t + n_q(t)\sin w_c t$ توان $v_i(t)$ $\leftarrow \overline{v_i^2(t)}$

خروجی دمدولاتور : $\underbrace{A_R x(t)}_{\text{سیگنال پایین گذر}} + n_i(t)$ $S_R = \overline{(A_R x(t))^2} = A_R^2\overline{x^2(t)} = A_R^2 S_x$ $S_x \xleftarrow{\text{توان}} x(t)$

$A_R^2 S_x \xleftarrow{\text{توان}} A_R x(t)$

$$SNR_D = \frac{A_R^2 S_x}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{A_R^2 S_x}{2\eta W} \quad (1) \xleftarrow[\text{زیر منحنی}]{\text{مساحت}}$$



همیشه باید روابط را برحسب $\gamma = \frac{S_R}{\eta W}$ بیان کنیم. داریم :

$$x_r(t) = A_R x(t)\cos w_c t \Rightarrow S_R = \frac{A_R^2}{2} S_x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow SNR_D = \frac{\cancel{A_R^2}}{2\eta W}\times\frac{2S_R}{\cancel{A_R^2}} = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma$$

نتیجه : مدولاسیون DSB تأثیری در SNR ندارد.

$x_R(t) = A_R x(t)\cos w_c t \rightarrow S_R = \overline{A_R^2 x^2(t)\cos^2 w_c t} = (A_R^2 S_x)\overline{\cos^2 w_c t} =$

$A_R^2 S_x\overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2w_c t\right)} = \frac{A_R^2}{2} S_x$

در سایه سار اندیشه، بی هیچ چشم داشت زمینی

عهد بسته ایم آسمانی شویم.

در این محفل علمی با ما همراه باشید.

زمان : همین حالا تا همیشه

مکان : تارنمای برق ایران ؛ www.tbi-net.com

رسیده ایم پر از رنج راه تا دریا

خوشا یکی شدن رودها خوشا دریا

نه ما نه من نه تو ، او نقطه سرانجام است

بیا که بی من و تو ما شویم و ما دریا

من و تو چشمه باران ابر او بودیم

از ابتدا دریا بود و انتها دریا