بسم الله الرحمن الرحیم

مخابرات

(بخش سوم)

استاد صافی

۱۰

گوش انسان به فاز حساس نیست. فرکانس برایش مهم است یعنی $|X(f)|$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

خروجی فیلتر $z(t) = \frac{A_c}{4} x(t) \cos\phi \overset{\mp}{\pm} \frac{A_c}{4} \hat{x}(t) \sin\phi$

$$Z(f) = \frac{A_c}{4} X(f) \cos\phi \pm \frac{A_c}{4} \hat{X}(f) \sin\phi$$

$$\hat{X}(f) = \begin{cases} jX(f) & f < 0 \\ -jX(f) & f > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{A_c}{4} X(f) \cos\phi \pm j \frac{A_c}{4} X(f) \sin\phi$$

$$= \frac{A_c}{4} X(f) \left(\cos\phi \pm j \sin\phi \right) = \frac{A_c}{4} X(f) e^{\pm j\phi}$$

$$\Rightarrow |Z(f)| = \frac{A_c}{4} |X(f)|$$

$$\measuredangle Z(f) = \pm\phi$$

به عبارت دیگر اعوجاج دامنه نداریم ولی اعوجاج تأخیری داریم که گوش انسان به اعوجاج تأخیری حساس نیست و لذا

جابجایی فاز در سیستم‌های SSB برای صدا اهمیتی ندارد.

1

$$\begin{cases} x(t)=1 & \phi_\Delta=200 \Rightarrow \phi(t)=200 \\ x(t)=-0/8 & \phi_\Delta=200 \Rightarrow \phi(t)=-160=200 \end{cases}$$

Subject:

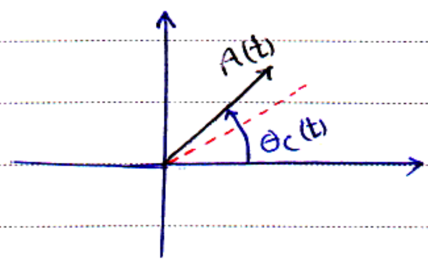
Year. Month. Date. ( )

فصل ۴ : مدولاسیون زاویه‌ای (غیرخطی) (فصل ۵ کتاب)

در مدولاسیون زاویه‌ای مشخصات زاویه‌ای سیگنال حامل متناسب با سیگنال پیام تغییر می‌کند. (دامنه ثابت است)

سیگنال میان‌گذر : $A(t)\cos(w_c t+\phi(t))$

زاویه لحظه‌ای : $\theta_c(t)=w_c t+\phi(t)$



به عبارت دیگر $\theta_c(t)$ متناسب با پیام $x(t)$ تغییر می‌کند

$$Re\{A(t)\,e^{j\theta_c(t)}\}=V_{bp}(t)$$

مدولاسیون زاویه‌ای را مدولاسیون نمایی نیز می‌گوییم

مدولاسیون زاویه‌ای ← مدولاسیون فاز (PM) هم فازش هم فرکانس لحظه‌ایش با پیام تغییر می‌کند

← مدولاسیون فرکانس (FM)

مدولاسیون PM : در این مدولاسیون، فاز لحظه‌ای $\phi(t)$ متناسب با سیگنال پیام $(x(t))$ تغییر می‌کند

فاز لحظه‌ای $\phi(t)=\phi_\Delta x(t)$ $\qquad \phi_\Delta \le 180^\circ \qquad \phi_\Delta=400$

$x(t)=0/1 \Rightarrow \phi(t)=40$

$x(t)=1 \xrightarrow{\phi(t)=} 400=\cancel{360}+40=40$

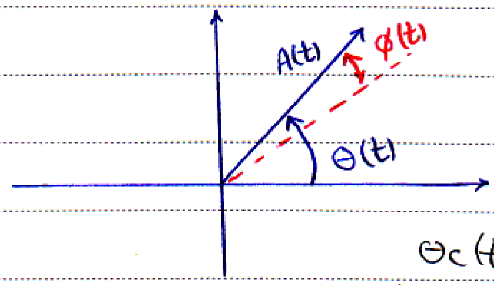
پس احتیاج نداریم ϕ_Δ را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که به ازای دو $x(t)$ متفاوت یک فاز را به دست آوریم

لازمه‌ی داشتن $\phi(t)$ های مختلف به ازای $x(t)$ های مختلف این است که $\phi_\Delta \le 180$ باشد.

$$\begin{cases}\phi_\Delta\le 180\\ |x(t)|\le 1\end{cases}\Rightarrow -180\le\phi(t)\le 180$$

$-1\le x(t)\le 1$

ϕ_Δ با شاخص مدولاسیون فاز (انحراف فاز) می‌دانیم که حداکثر جابجایی فاز ناشی از $x(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل موج مدوله‌شده PM در حوزه زمان: رابطه غیرخطی

$$x_c(t) = A_c \cos\big(\underbrace{\omega_c t + \phi_\Delta x(t)}_{\theta_c(t)}\big)$$

فرکانس لحظه‌ای:

$$* \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_c(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d(\omega_c t + \phi_\Delta x(t))}{dt} = f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$$

مدولاسیون FM: در این مدولاسیون فرکانس لحظه‌ای $f(t)$ متناسب با سیگنال پیام $(x(t))$ تغییر می‌کند.

یعنی داریم:

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \qquad \left.\begin{matrix} f_\Delta < f_c \\ |x(t)| \le 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow f(t) \ge 0$$

خیلی بزرگ

معمولاً در عمل f_Δ را خیلی کوچک‌تر از f_c در نظر می‌گیریم تا شرط مثبت بودن سیگنال حفظ شود.

شکل موج مدوله‌شده FM در حوزه زمان:

$$\theta_c(t) = 2\pi\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + \phi_c(t_0) \text{: در واقع بوده} \qquad t_0 = 0$$

با توجه به رابطه *

زاویه لحظه‌ای $\theta_c(t) = 2\pi\int f(t)\,dt =$

$$2\pi\int (f_c + f_\Delta x(t))\,dt = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$$

فاز لحظه‌ای $\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$

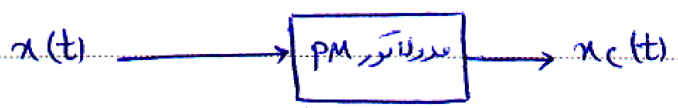
$$\Rightarrow \boxed{x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)}$$

جدول خلاصه :

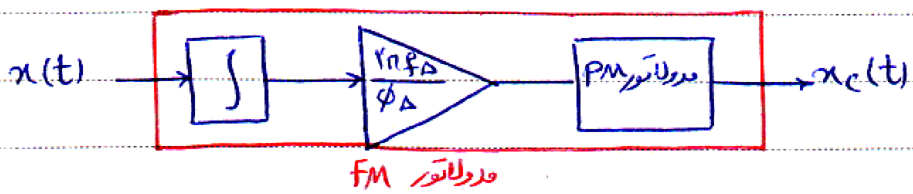
	فاز لحظه‌ای	فرکانس لحظه‌ای	شکل موج مدوله شده	
PM	$\phi_\Delta\, x(t)$	$f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$	$A_c \cos\left(\omega_c t + \phi_\Delta\, x(t)\right)$	باید حفظ شوند
FM	$2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$	$f_c + f_\Delta\, x(t)$	$A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$	

نتیجه ۱) در هر دو مدولاسیون FM و PM هم فاز و هم فرکانس با پیام تغییر می‌کند.

نتیجه ۲) مدولاتور و دمدولاتور PM را می‌توان با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور FM ساخت و برعکس.

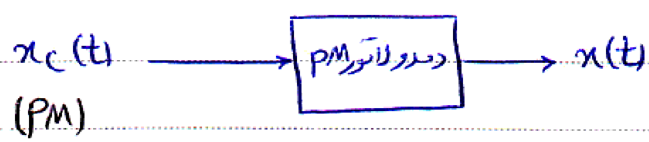


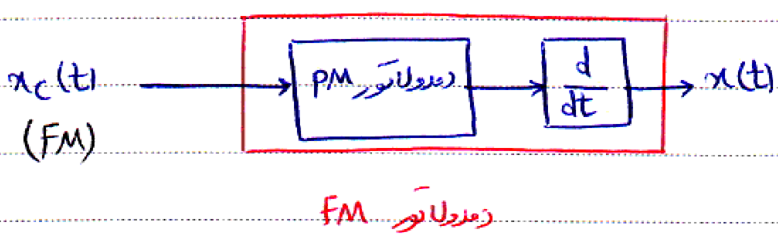
: PM

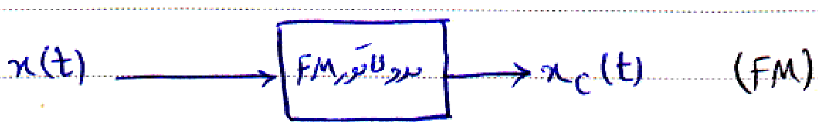


: FM

می‌خواهیم مدولاتور و دمدولاتور FM را با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور PM بسازیم :

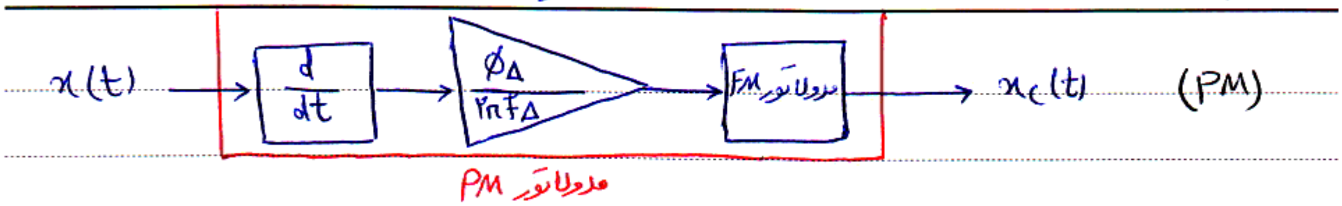


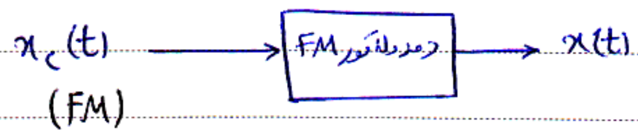


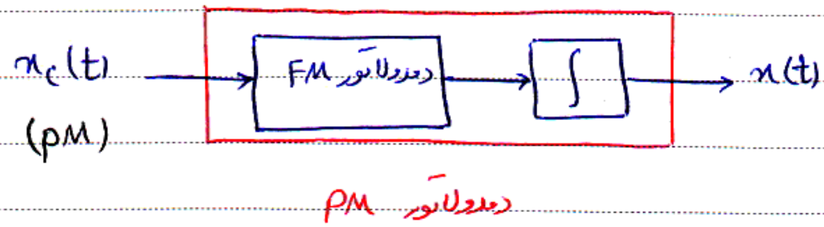


Subject:
Year. Month. Date. ( )

می خواهیم مدولاتور و دمدولاتور PM را با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور FM بسازیم :





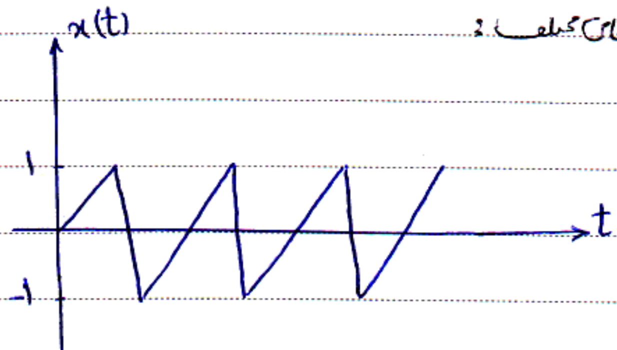


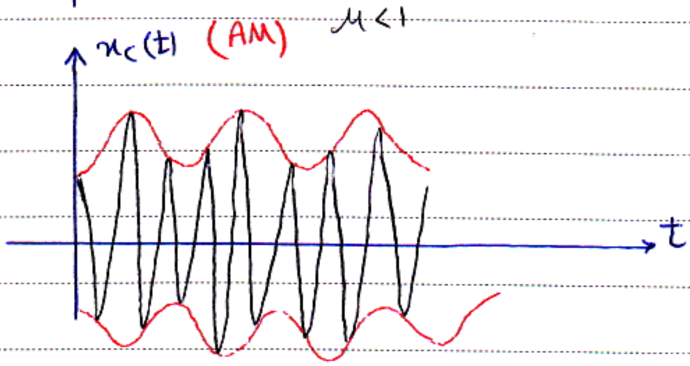
توان ارسالی : چون دامنه‌ی موج مدوله شده مقدار ثابت A_c است توان ارسالی مستقل از $x(t)$ است و

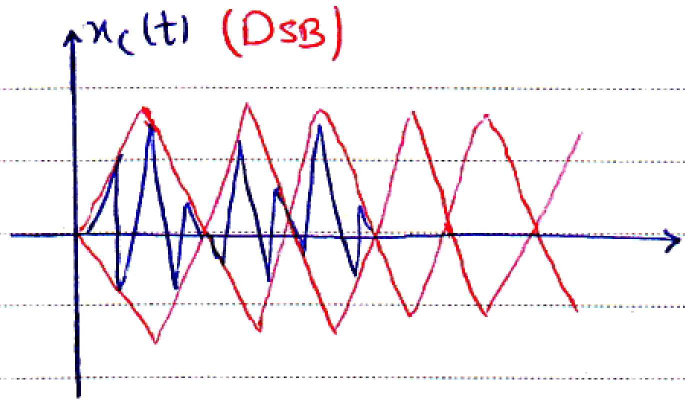
برابر است با :

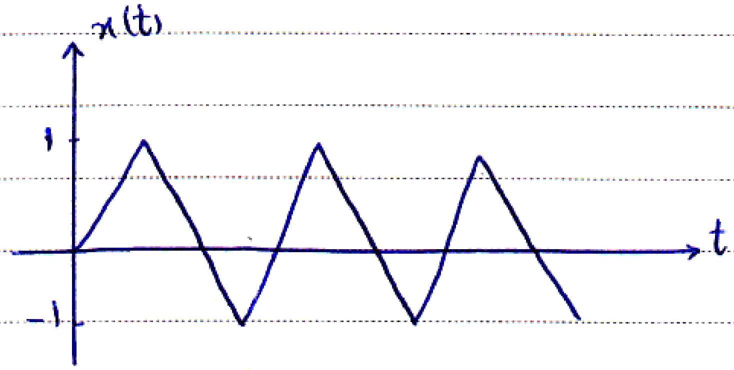
$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2$$

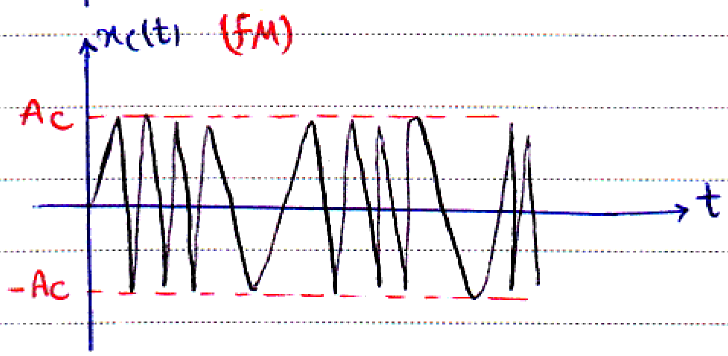
مقایسه‌ی شکل موج‌های مدوله شده در مدولاسیون‌های مختلف :





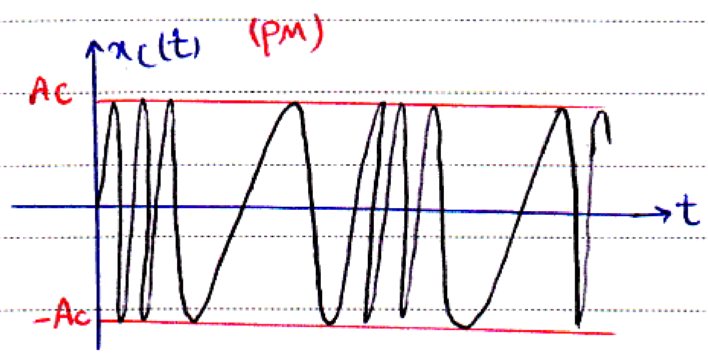






FM: $f(t)=f_c+2\pi f_\Delta\, x(t)$

PM: $f(t)=f_c+\dfrac{\phi_\Delta}{2\pi}\,\dfrac{dx(t)}{dt}$



یادآوری:

PM: $x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+\phi_\Delta\, x(t)\right)$

FM: $x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right)$

جوانی عشق نازاست.

همیشه $\frac{1}{2} A_c^2 \Longrightarrow$ توان ارسالی FM و PM است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

علیرغم شباهت بیش از حد FM و PM ، FM دارای خاصیت حذف نویز بهتری است زیرا سیگنال دمودوله شده داراست $f_c + f_\Delta x(t)$ که بدون افزایش توان ارسالی و فقط با افزایش f_Δ می‌توان آن را افزایش داد و لذا SNR را افزایش داد. البته افزایش f_Δ به معنی افزایش پهنای باند است و باید بین SNR و پهنای باند یک حالت بهینه را در نظر گرفت.

$$SNR = \frac{\text{توان سیگنال}}{\text{توان نویز}} = \frac{P_S}{P_N}$$

مدولاسیون PM و FM باند باریک:

$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \phi(t)\right)$$

یادآوری:

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta\, x(t) & ; PM \\ 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt & ; FM \end{cases}$$

بیان سیگنال براساس مولفه‌های هم‌فاز و ربعی:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$x_c(t) = \underbrace{A_c \cos\phi(t)}_{\substack{x_{ci}(t) \\ \text{مولفه هم‌فاز}}} \cos w_c t - \underbrace{A_c \sin\phi(t)}_{\substack{x_{cq}(t) \\ \text{مولفه ربعی}}} \sin w_c t$$

بسط

$$\cos\phi(t) = 1 - \frac{1}{2}\phi^2(t) + \ldots \qquad \text{جملات زوج}$$

$$\sin\phi(t) = \phi(t) - \frac{1}{6}\phi^3(t) + \ldots \qquad \text{〃 فرد}$$

فقط برای باند باریک

چنانچه $\phi(t) \ll 1$ باشد داریم:

می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کنیم. $\phi^2, \phi^3, \ldots$

$\checkmark$

$$\sin\omega_c t \xrightarrow{F} \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_c)-\delta(f-f_c)\right]$$

$$\cos\omega_c t \xrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right]$$

$$\int x(t)dt \xrightarrow{F} \frac{X(f)}{j\omega}=\frac{X(f)}{j2\pi f}$$

$\phi(t)\to 0$

$$\begin{cases} x_{c_i}(t) \simeq A_c & A_c\cos(0)=A_c \\ x_{c_q}(t)\simeq A_c\,\phi(t) & A_c\sin\phi(t)=A_c\phi(t) \end{cases}$$

$\sin x \simeq x$
$x\to 0$

$\phi(t)\to 0$

$$\boxed{x_c(t)=A_c\cos\omega_c t - A_c\,\phi(t)\sin\omega_c t} \Rightarrow$$ حوزه

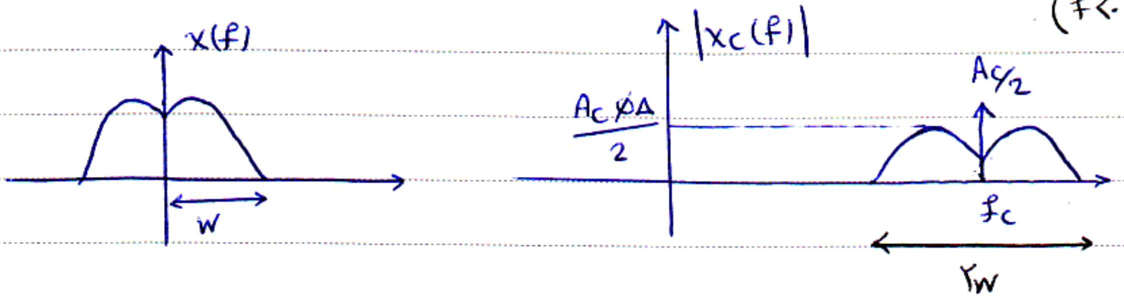
باند باریک :

$$=\begin{cases} A_c\cos\omega_c t-\underbrace{A_c\,\phi_\Delta\, x(t)}_{X(f)}\,\underbrace{\sin\omega_c t}_{\frac{1}{2j}\delta(f-f_c)} & ;\ PM \\ A_c\cos\omega_c t-\underbrace{\left(A_c 2\pi f_\Delta\int x(t)dt\right)}_{X(f)/j2\pi f}\underbrace{\sin\omega_c t}_{\frac{1}{2j}\delta(f-f_c)} & ;\ FM \end{cases}$$

باند باریک
Narrow band

$$\Rightarrow X_c(f)=\begin{cases} \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)+A_c\phi_\Delta\left(\frac{\times j}{2}\right)X(f-f_c) & \text{NB PM } (f>0) \\ \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)+A_c\cancel{2\pi}f_\Delta\left(\frac{\times j}{2}\right)\frac{X(f-f_c)}{\cancel{j2\pi}(f-f_c)} & \text{NB FM } (f>0) \end{cases}$$

(با مراوده برای $f<0$)



$x_c(t)$ یک سیگنال میان‌گذر با پهنای باند $2W$ است. البته چنانچه $\phi(t)$ افزایش یابد جملات $\phi^2(t)$،

$\phi^3(t)$، ... قابل صرف‌نظر کردن نیستند و لذا پهنای باند افزایش می‌یابد. (یعنی دیگر باند باریک نیست)

مدولاسیون تک آهنگ (یک Cos یا یک Sin ای خالص را ارسال کنیم.)

$x(t)=A_m\cos\omega_m t \longrightarrow$ در مدولاسیون تک آهنگ

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases} \qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2} \qquad \cos^3 u = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$$

FM: $x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int (A_m \cos w_m t)\, dt\right)$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \cancel{2\pi} f_\Delta A_m \frac{\sin w_m t}{\underbrace{\cancel{2\pi} f_m}_{w_m}}\right)$$

$x(t) = A_m \sin w_m t$

PM: $x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \phi_\Delta A_m \sin w_m t)$

$$\phi(t) = \beta \sin w_m t \qquad \beta = \begin{cases} A_m \phi_\Delta & , PM \\ \dfrac{A_m}{f_m} f_\Delta & , FM \end{cases}$$

← شاخص مدولاسیون
تک آهنگ بیانگر حداکثر انحراف فاز است.

تک آهنگ
$x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \underbrace{\beta \sin w_m t}_{\phi(t)})$

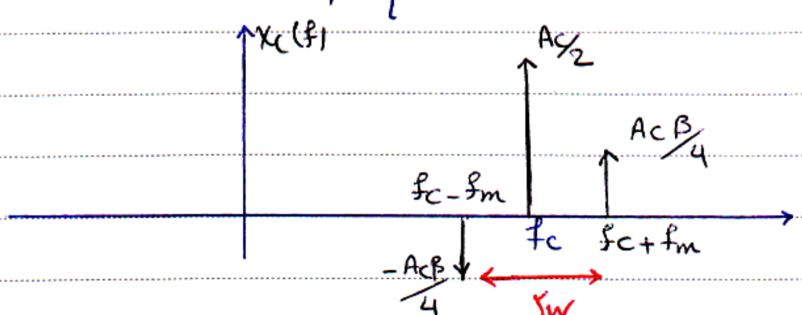
+

باند باریک $\phi(t) \ll 1 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \beta \ll 1$

* با فرض مدولاسیون تک آهنگ باند باریک داریم:

$$x_c(t) \simeq A_c \cos w_c t - A_c \beta \sin w_m t \sin w_c t$$

$$= A_c \cos w_c t - \frac{A_c \beta}{2}\left[\cos(w_c - w_m)t - \cos(w_c + w_m)t\right]$$



← $f>0$

چون باند باریک است.

$$\cos w_c t \xrightarrow{f_c} \frac{1}{2}\{\delta(f - f_c) + \ldots\} \quad *$$

$$\cos(w_c - w_m)t \xrightarrow{f_c - f_m} \frac{1}{2}\left\{\delta(f - (f_c - f_m)) + \delta(f + (f_c - f_m))\right\}$$

$$\begin{cases} \sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \\ \cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right] \end{cases}$$

چنانچه سیگنال سینوسی باند باریک نباشد؛ داریم:

$$x_c(t) = A_c \cos(\beta \sin \omega_m t) \cos \omega_c t -$$

(تک آهنگ اگر سیگنال ارسالی باند باریک نباشد)

$$A_c \sin(\beta \sin \omega_m t) \sin \omega_c t$$

فرکانس ؟ f_m

دوره تناوب $T = \frac{1}{f_m}$

توابع بسل:

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos n\omega_m t$$

$$\sin(\beta \sin \omega_m t) = \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin(n\omega_m t)$$

ضرایب $J_n(\beta)$: توابع بسل نوع اول مرتبه n با آرگومان β

با جایگذاری داریم:

$$x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos \omega_c t + A_c \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos n\omega_m t \cos \omega_c t$$

چون به n بستگی ندارد می‌توانیم آن را وارد کنیم

$$- A_c \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin n\omega_m t \sin \omega_c t$$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos \omega_c t + A_c \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} J_n(\beta) \left[\cos(\omega_c + n\omega_m)t + \cos(\omega_c - n\omega_m)t\right]$$

$$+ A_c \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} J_n(\beta) \left[\cos(\omega_c + n\omega_m) - \cos(\omega_c - n\omega_m)t\right]$$

$$J_{-n}(\beta) \triangleq (-1)^n J_n(\beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t}$$

این رابطه فقط برای تک آهنگ است (که باند باریک نباشد) → هم FM هم PM

$f - (f_c + n f_m) \longrightarrow f = f_c + n f_m$

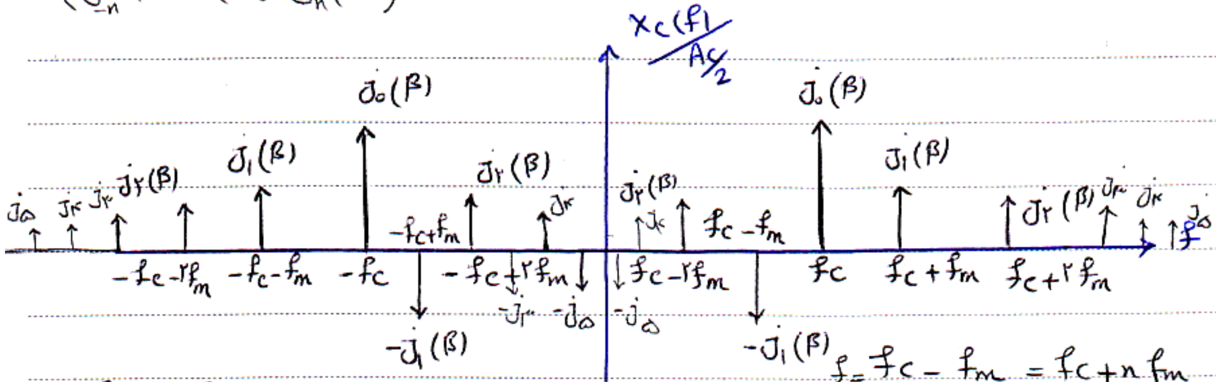
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$f + (f_c + n f_m) \longrightarrow f = -f_c - n f_m \Rightarrow f = \pm f_c \pm n f_m$

نتیجه: طیف فرکانسی $X_c(f)$ شامل بی‌نهایت ضربه در فرکانس‌های $\pm f_c \pm n f_m$ است. دامنه‌ی این ضربه‌ها (سطح) برابر $\frac{A_c}{2} J_n(\beta)$ است. ضربه‌های مربوط به n های منفی و فرد دارای دامنه‌ی منفی هستند.

$\left(J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)\right)$



$f = f_c - f_m = f_c + n f_m \Rightarrow n = -1$

$f = f_c - 3 f_m = f_c + n f_m$

اثر زنبیلی:

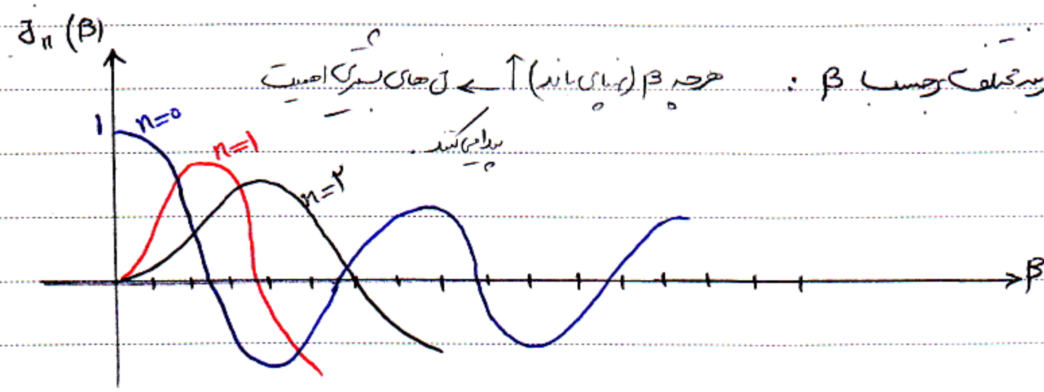
$J_{-3}(\beta) = (-1)^3 J_3(\beta) = -J_3(\beta)$

$J_{-1}(\beta) = (-1)^1 J_1(\beta) = -J_1(\beta)$

با توجه به نامحدود بودن n، ضربه‌های مربوط به طیف حول f_c و طیف حول $-f_c$ هم‌پوشانی دارند که باید در هر فرکانس اثر هر دو را در نظر گرفت.

بررسی توابع بسل :

– توابع بسل با درجه‌های مختلف بر حسب β : هرچه β (n) بزرگتر باشد $\uparrow$ ← n های بیشتری اهمیت پیدا می‌کنند.



نتایج :

۱) دامنه‌ی قسمت فرکانس حامل برابر $J_0(\beta)$ است که این مقدار به ازای β های مختلف مقادیر متفاوتی دارد.

← ضربه‌ای که در فرکانس f_c است

FM: $\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta$ PM: $\beta = A_M \phi_\Delta$

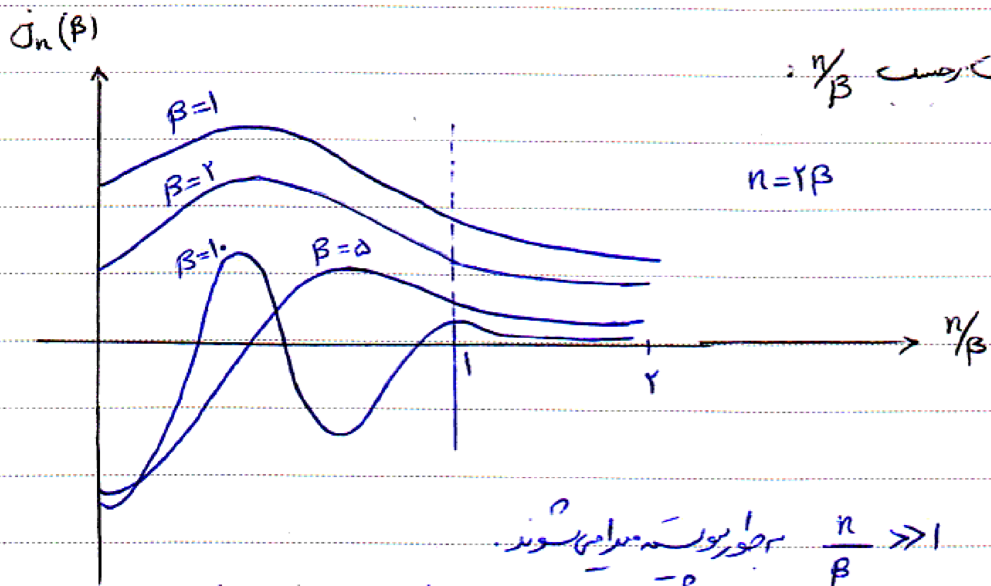
پس برخلاف مدولاسیون‌های دامنه، فرکانس حامل بخشی از اطلاعات پیام را شامل می‌شود.

۲) تعداد ضربه‌های کناری دارای اهمیت به β بستگی دارد. اگر $\beta<1$ باشد فقط $J_0(\beta)$ و $J_1(\beta)$ مهم‌اند ولی

به ازای $\beta>1$ ضربه‌های مهم بیشتری خواهیم داشت و طیفی مشابه به مدولاسیون‌های خطی ایجاد می‌شود

۳) هرچه β بزرگ‌تر باشد پهنای باند بزرگ‌تر می‌شود چون تعداد ضربه‌های با اهمیت بیشتر می‌شود.

توابع بسل با β های مختلف برحسب n/β :



تمامی منحنی‌ها به ازای $\frac{n}{\beta} \gg 1$ به طور پیوسته نزولی می‌شوند.

$$\frac{n}{\beta} \gg 1 \Rightarrow J_n(\beta) \ll 1$$

جدول تابع بسل به ازای β و n های مختلف:

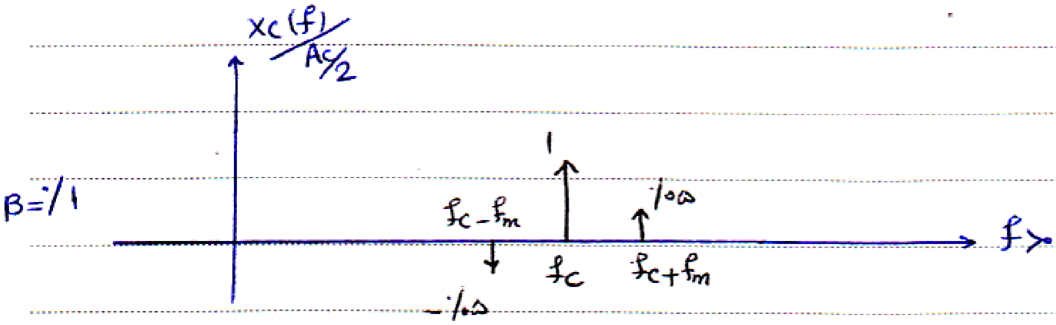
n	$J_n(۰/۱)$	$J_n(۰/۲)$	$J_n(۰/۵)$	$J_n(۱)$	$J_n(۲)$	$J_n(۵)$
0	۱	۰/۹۹	۰/۹۴	۰/۷۷	۰/۲۲	-۰/۱۸
1	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲۴	۰/۴۴	۰/۵۸	-۰/۳۳
2			۰/۰۳	۰/۱۱	۰/۳۵	۰/۰۵
3				۰/۰۲	۰/۱۳	۰/۳۶
4					۰/۰۳	۰/۳۹
5						۰/۲۶
6						۰/۱۳
7						۰/۰۵
8						۰/۰۲

بقیه قابل صرف نظر کردن یا صفر هستند.

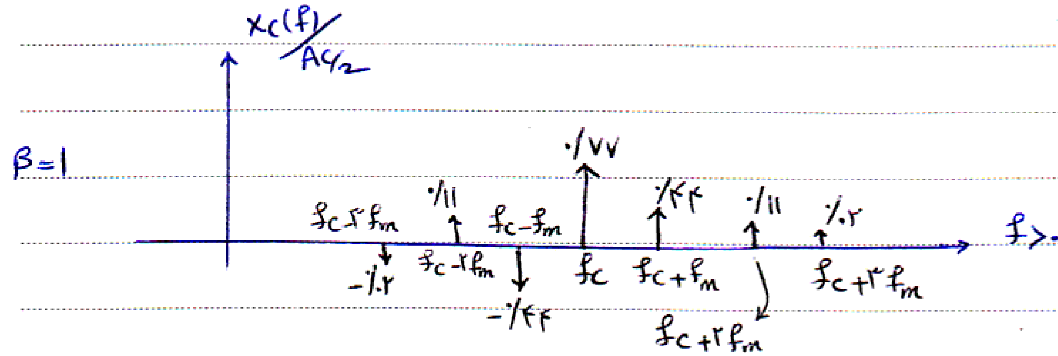
$$x_c(t)= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(w_c + n w_m)t$$

$$\begin{cases} f = f_c + n f_m \\ f = -f_c - n f_m \end{cases}$$

نمایش طیف فرکانسی PM و FM به ازای β های مختلف:



$\beta \uparrow \leftarrow$ پهنای باند بیشتر



مثال ۱)

سیگنال FM باند باریک $x_c(t)=100 \cos(2\pi 5000t + 0/5 \sin 2\pi 200t)$ ارسال شده است. عبارتی برای $f(t)$ بنویسید، طیف فرکانسی را رسم کنید، $S(t)$ را محاسبه کرده و با $\frac{1}{2}A_c^2$ مقایسه کنید.

$A_c = 100 \qquad f_c = 5\ KHz \qquad \beta = 0/5$ $\qquad \beta=0/05 \Leftarrow$ سیگنال باند باریک است

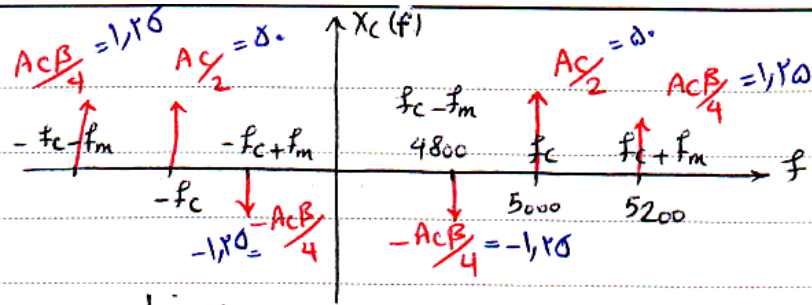
$f_m = 200\ HZ \qquad x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \beta \sin w_m t)$

فرکانس لحظه‌ای $f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = 5000 + 10 \cos 2\pi 200 t = f_c + f_\Delta x(t)$

$\Rightarrow f_\Delta = 10 \ , \ x(t) = \cos 2\pi 200 t$

$\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta = \frac{1}{200} \times 10 = 0/05$

ب) طیف فرکانسی :



n	$J_n(0/05)$
0	
1	

چون باند باریک است نیازی به جدول هم ندارد.

ج) محاسبه $S(t)$: مساحت ضربه‌ها $\longrightarrow$ $S(t)=\frac{1}{2}\times 100^2+\frac{1}{2}\left(\frac{A_c\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{A_c\beta}{2}\right)^2$

$= 5000 + 6/25 = 5006/25$

چون $\sin\beta \simeq \beta$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}A_c^2=\frac{1}{2}100^2=5000$

این اختلاف به خاطر تقریبی است که از باند باریک بودن نتیجه گرفته‌ایم

مهم برای امتحان

مثال ۲) سیگنال FM تک‌ تن با مشخصات $A_c=100$ ، $A_m f_\Delta = 8\,KHz$, $f_m=4\,KHz$,

$f_c=30\,KHz$ را در نظر بگیرید.

الف) عبارتی برای $f(t)$ بنویسید.

ب) طیف فرکانسی را رسم کنید.

ج) $S(t)$ را محاسبه کرده و با $\frac{1}{2}A_c^2$ مقایسه کنید.

n	$J_n(2)$
0	0/22
1	0/58
2	0/35
3	0/13
4	0/03

وقتی $J_1(\beta)$ برای n ها با اهمیت است پس $J_{-1}(\beta)$ هم برای n ها با اهمیت است $\Rightarrow \sum_{-4}^{4}$

$J_n(\beta)$ برای n های از ۰ تا ۴ با اهمیت است.

$J_n(\beta)$ برای $n>4$ قابل صرف نظر کردن هستند.

الف)

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$$

$$x_c(t) = 100 \cos(\underbrace{2\pi \times 30 t + 2 \sin 2\pi \times 4 t}_{\theta})$$

$$\beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m} = \frac{8}{4} = 2$$

فرض کن) این سیگنال را برای $f_c = 11^{KHZ}$ انجام دهید. (با استفاده از اثر آینه‌سازی)

حل سؤال ۲) A_M را یک سیم می‌توان در نظر گرفت.

$$x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$$

$$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$$

در FM، $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

در FM تک آهنگ $f(t) = f_c + f_\Delta A_m \cos \omega_m t$

الف)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + f_\Delta \underbrace{x(t)}_{A_m \cos \omega_m t} = 30^k + 8^k \cos 2\pi (4^k) t$$

فرکانس لحظه‌ای بین 22^k تا 38^k تغییر می‌کند. پهنای باند سیگنال FM در حالت ایده‌آل بی‌نهایت است

از روی فرکانس لحظه‌ای نمی‌توان پهنای باند را بدست آورد. ($38-22=16^k$ اشتباه است.)

$$\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta = \frac{8^k}{4^k} = 2$$

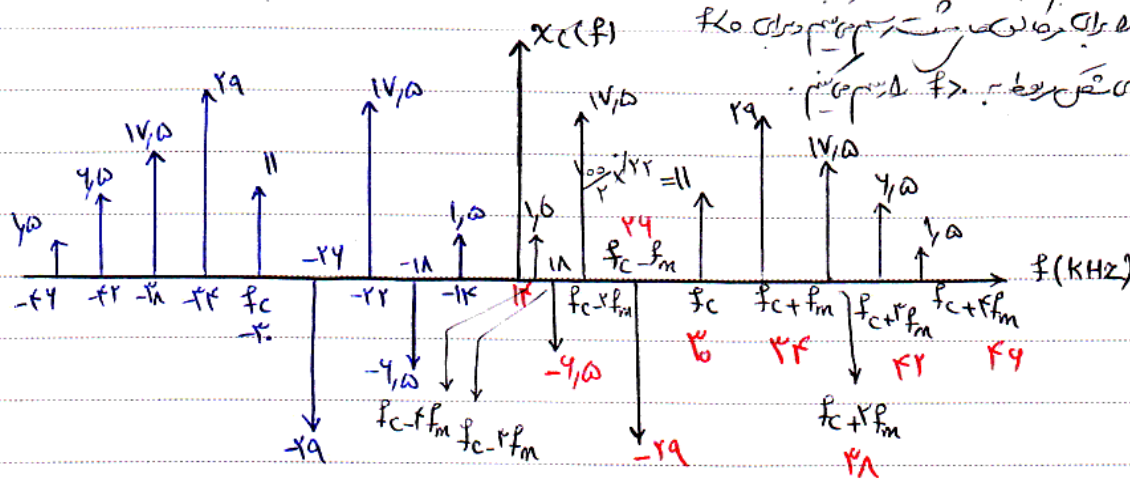
ب)

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-4}^{4} J_n(\beta)\, \delta(f_c + n f_m) \qquad f>0$$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-4}^{4} J_n(\beta)\, \delta(-f_c - n f_m) \qquad f<0$$

شکل را برای فرکانس‌های مثبت رسم می‌کنیم برای $f<0$ قرینه شکل مربوط به $f>0$ را رسم می‌کنیم.



پهنای باند $46-14=32^{KHZ}$

هرچه $f_\Delta \uparrow$ ← نویز $\downarrow$

ج) در مدول $S_T = \frac{1}{2}(22)^2 + 2\times\frac{1}{2}(58)^2 + 2\times\frac{1}{2}(35)^2 + 2\times\frac{1}{2}(13)^2 + 2\times\frac{1}{2}(3^2) = 5009$ → انرژی $x_c(t)$ نوشته شده است

دامنه‌ی یک Cos ، $\frac{1}{2}A_c^2$ ای

یا

انرژی شکل $S_T = 2(11)^2 + 4(29)^2 + 4(17.5)^2 + 4(6.5)^2 + 4(1.5)^2 = 5009$

تئوری: $\frac{1}{2}A_c^2 = \frac{1}{2}\times 100^2 = 5000$

تفاوت به دلیل آن است که در اعداد $J_n(\beta)$ تقریب زده‌ایم.

FM دو آهنگ:

$$x(t) = A_{m_1}\cos\omega_{m_1}t + A_{m_2}\cos\omega_{m_2}t$$

$$x_c(t) = A_c\cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta\int\left(A_{m_1}\cos\omega_{m_1}t + A_{m_2}\cos\omega_{m_2}t\right)dt\right)$$

$$= A_c\cos(\overbrace{\omega_c t + \beta_1\sin\omega_{m_1}t}^{A} + \beta_2\sin\omega_{m_2}t)$$

$$\beta_1 = \frac{A_{m_1}}{f_{m_1}}f_\Delta \qquad \beta_2 = \frac{A_{m_2}}{f_{m_2}}f_\Delta$$

در تک آهنگ داشتیم: $x_c = A_c\cos(\overbrace{\omega_c t + \beta\sin\omega_m t}^{A\ \text{شد}})$

$$x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c t + n\omega_m t)$$

با توجه به تک آهنگ $\Longrightarrow$ $x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_2)\cos(\omega_c t + \beta_1\sin\omega_{m_1}t + n\omega_{m_2}t)$

$\cos\left((\omega_c t + n\omega_{m_2}t) + \beta_1\sin\omega_{m_1}t\right)$ در اینجا A را در نظر بگیریم

$$= \boxed{A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)\cos(\omega_c t + m\omega_{m_1}t + n\omega_{m_2}t)}$$

رابطه‌ی FM دو آهنگ

تعبیر $x_c(t)$ در حوزه‌ی فرکانس:

$X_c(f)$ شامل ۴ دسته ضربه است.

① ضربه‌ای در فرکانس حامل با دامنه‌ی $\frac{A_c}{2}J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$

یعنی f_c

② ضریب‌های باند کناری در فرکانس $f_c \pm m f_{m_1}$ مربوط به یک آهنگ با دامنه $\frac{A_c}{2} J_m(\beta_1) J_0(\beta_2)$

③ ضریب‌های باند کناری (کنار باند) در فرکانس‌های $f_c \pm n f_{m_2}$ مربوط به آهنگ دیگر با دامنه $\frac{A_c}{2} J_0(\beta_1) J_n(\beta_2)$

④ ضریب‌های باند کناری در فرکانس‌های $f_c \pm m f_{m_1} \pm n f_{m_2}$ مربوط به دو آهنگ با دامنه $\frac{A_c}{2} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2)$

مثال)

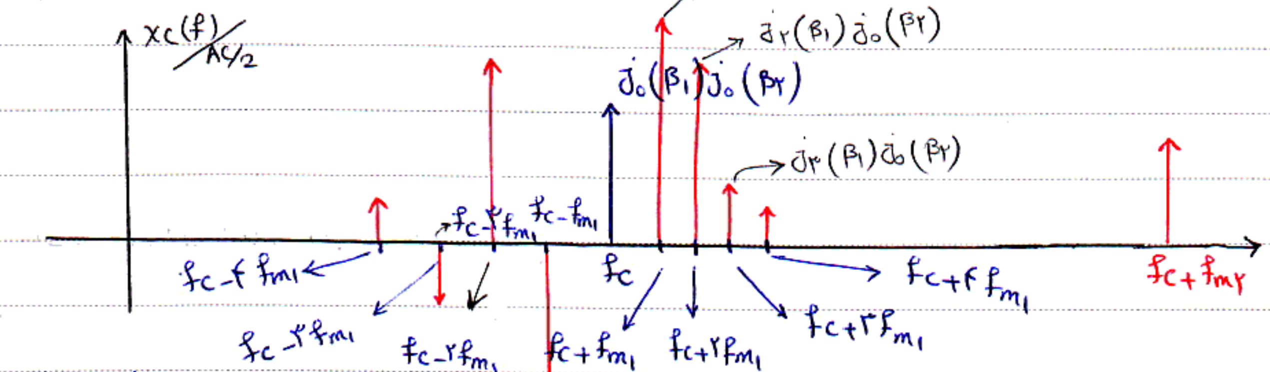
طیف FM دو آهنگ با شرایط $f_{m_1} \ll f_{m_2}$ و $\beta_1 > \beta_2$.

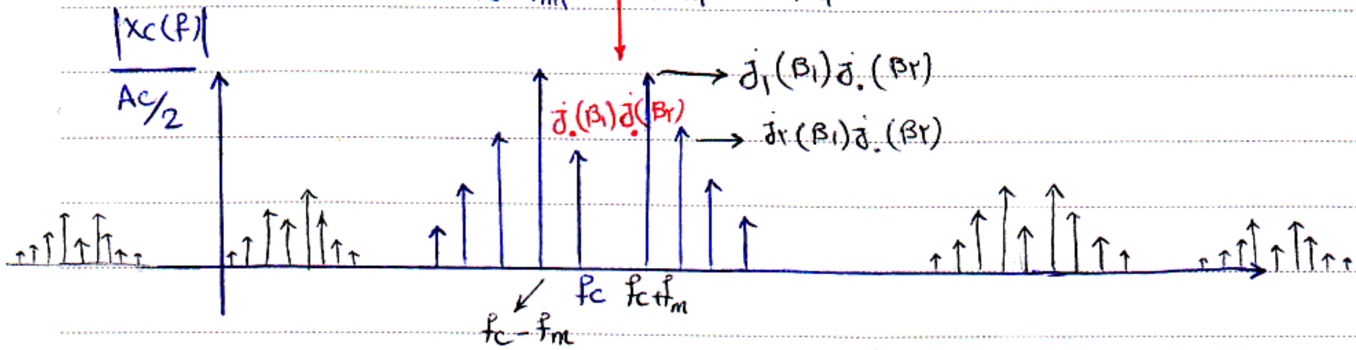
نکته: β تعداد جملات با اهمیت را مشخص می‌کند (هرچه β بیشتر باشد تعداد جملات با اهمیت بیشتر می‌شود.)

$2 > 0/5$

$\beta_1 > \beta_2$

۵ جمله‌ای   ۳ جمله‌ای





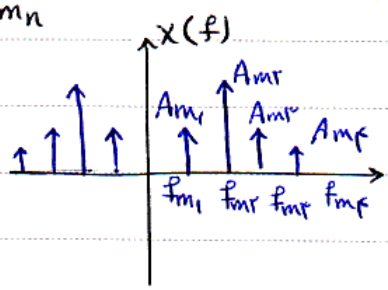
مدولاسیون چند آهنگ : (FM چند آهنگ)

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_{m_n} \cos w_{m_n} t$$

در این صورت باید طیف فرکانس های حول f_c و با فواصل $\pm n_1 f_{m_1} \pm n_2 f_{m_2} \pm \dots \pm n_N f_{m_N}$

را در نظر گرفت و با توجه به مقادیر β_1 تا β_N جملات با اهمیت را به دست آورد.

$$\beta_n = \frac{A_{m_n}}{f_{m_n}} f_\Delta$$



f_Δ خصوصیت مدولاتور

A_m و f_m خصوصیت سیگنال پیام

مدولاسیون طیف پیوسته :

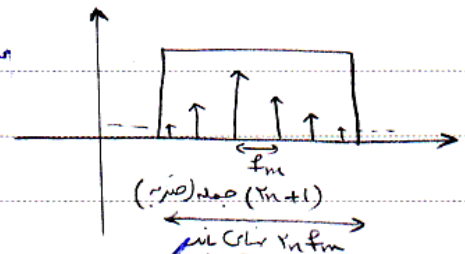
می توان گفت که $x(t)$ شامل طیفی از سینوسی ها در محدوده ی فرکانسی 0 و W است و لذا باید با توجه به دامنه ی آن در هر فرکانس، β مربوط به هر فرکانس را محاسبه کرده و جملات با اهمیت را به دست آورد.

محاسبه ی پهنای باند سیگنال FM :

سیگنال مدوله شده FM دارای بی نهایت مولفه ی کناری است و به نظر می رسد که طیف FM تا بی نهایت گسترش دارد ولی ثابت شده است که برای هر β بیشتر توان در یک پهنای باند محدود قرار می گیرد و در صورت حذف مولفه های خارج از این باند محدود، اعوجاج جدی در سیگنال صورت نمی گیرد. معمولاً اگر 99% توان سیگنال FM در باند عبور قرار گیرد اعوجاج قابل صرف نظر کردن است. برای محاسبه ی پهنای باند ارسالی FM تک آهنگ نسبت توان S_N را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}A_c^2 \sum_{k=-n}^{n} J_k^2(\beta)}{\frac{1}{2}A_c^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)}$$

مدولاسیون FM تک آهنگ



برای محاسبه‌ی پهنای باند FM باید کوچکترین n ای را انتخاب کنیم که $S_n \geq 0/99$ شود. در این صورت پهنای باند ارسالی برابر $2nf_m$ خواهد بود.

$\beta = 3 \longrightarrow n \simeq 5 \quad B_T = 10 f_m$ (۱۱ ضربه یا جمله)

با مشاهده جدول درمی‌یابیم که به ازای $\beta \geq 2$ داریم:

$$\boxed{\beta \geq 2: \quad n \simeq \beta + 2}$$

بنابراین پهنای باند ارسالی FM تک آهنگ برابر است با:

$$\boxed{B_T = 2nf_m} = 2(\beta+2)f_m = 2\left(\frac{A_m}{f_m}f_\Delta + 2\right)f_m = \boxed{2(A_m f_\Delta + 2f_m)}$$

f_Δ یک ویژگی مدولاتور و f_m و A_m ویژگی های پیام هستند.

حالتی که بیشترین پهنای باند را داشته باشیم.

بیشترین پهنای باند به ازای پیامی ایجاد می‌شود که دارای ویژگی $\boxed{A_m = 1 \text{ و } f_m = W}$ باشد. (بدترین حالت)

$|x(t)| \leq 1 \qquad x(t) = A_m \cos w_m t$

$A_m = 1 \qquad w_m = 2\pi f_m = 2\pi W \longrightarrow x(t) = \cos 2\pi W t$

β بدترین حالت

$$\longrightarrow B_T = 2(f_\Delta + 2W) = 2\left(\frac{f_\Delta}{W} + 2\right)W$$

برای تعمیم مدولاسیون تک آهنگ به سیگنال پیام $x(t)$ با پهنای باند W، نسبت انحراف D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نسبت انحراف $\boxed{D \triangleq \frac{f_\Delta}{W}}$

β بدترین حالت مدولاسیون تک آهنگ

که با شاخص مدولاسیون (β) در این حالت مدولاسیون تک آهنگ متناظر است.

نتایج‌های ابتدا استدلال را خواهیم بود :

$B_T = 2MW \qquad M = D+2\ ,\quad D \geqslant 2$

$$\Rightarrow \boxed{B_T = 2(D+2)W} = 2\left(\frac{f_\Delta}{W}+2\right)W \qquad D \geqslant 2$$

چنانچه بخواهیم برای کلیه D ها رابطه‌ای بسازیم می‌توان دو حالت حدی D را در نظر گرفت.

$$B_T = \begin{cases} 2f_\Delta = 2DW & D \gg 1 \qquad \frac{f_\Delta}{W} \gg 1 \qquad W \text{ خیلی کوچک} \\ 2W & D \ll 1 \qquad \frac{f_\Delta}{W} \ll 1 \qquad f_\Delta \text{ خیلی بزرگ} \end{cases}$$

که از ترکیب نتایج مدولاسیون تک آهنگ به ازای β خیلی بزرگ و خیلی کوچک به دست آمده است و لذا داریم به ازای

$$\boxed{B_T \simeq 2(D+1)W}$$

به ازای کلیه D ها

رابطه کارسون

کلیه D ها :

$D+1 \simeq D \qquad D \gg 1 \ :\ 2(D+1)W \Rightarrow 2DW$

$D \ll 1 \qquad D+1 \simeq 1 \Rightarrow 2W$

برای سیگنال PM روابط مشابهی استخراج می‌شود :

$$B_T \simeq 2(\phi_\Delta + 1)W$$

مثال) برای مدولاسیون FM سیگنال صوتی داریم.

$88\ \text{MHz} \leqslant f_c \leqslant 108\ \text{MHz}$

$f_\Delta = 75\ \text{kHz}$

$W = 15\ \text{kHz}$

$D = \frac{f_\Delta}{W} = 5 \qquad B_T = 2(D+2)W = 2(7)15^k = 210\ \text{kHz} = 14W$

دلیل

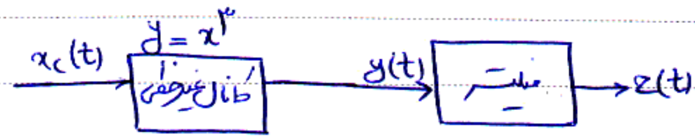
اگر برای هر کانال ۲۵۰ kHz در نظر بگیریم داریم:

$$\text{تعداد کانال‌ها} = \frac{20\,MHz}{250\,kHz} = 80$$

مزایای مدولاسیون زاویه‌ای: (حتماً حفظ شود)

۱) در این مدولاسیون اطلاعات در نقاط عبور از صفر ذخیره می‌شود و این نقاط در اثر جمع شدن با سیگنال‌های مزاحم مثل نویز به سختی جابجا می‌شود لذا مقاومت این نوع مدولاسیون نسبت به نویز بیشتر از مدولاسیون‌های دامنه است.

۲) مقاومت بسیار بالا در برابر اعوجاج غیرخطی



سیگنال DSB: $x_c(t)$ $\qquad x_c(t) = A_c\, x(t) \cos w_c t$

$$y(t) = x_c^3(t) = A_c^3\, x^3(t) \cos^3 w_c t = \frac{A_c^3}{4} x^3(t)\left(3\cos w_c t + \cos 3w_c t\right)$$

$$\text{خروجی فیلتر} = \underbrace{\frac{3A_c^3}{4}}_{A} x^3(t) \cos w_c t \xrightarrow[\text{ضرب } \cos]{\text{دمدولاسیون DSB}} A x^3(t)$$

سیگنال FM $\qquad x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt\right)$

$$y(t) = A_c^3 \cos^3\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right) = \frac{A_c^3}{4}\Big[3\cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt\right) + \cos\left(3 w_c t + 6\pi f_\Delta \int x(t)dt\right)\Big]$$

$$\text{خروجی فیلتر} \Rightarrow z(t) = \frac{3A_c^3}{4} \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right) \xrightarrow{\text{دمدولاسیون}} A x(t)$$

نتیجه: اعوجاج غیرخطی تاثیری روی اطلاعات پیام به صورت FM ندارد.

معایب مدولاسیون زاویه‌ای : (حفظ شود)

۱) پهنای باند زیاد

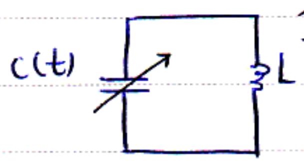
۲) پیچیدگی ساختار مدولاتور و دمدولاتور

ساختارهای موجود جهت تولید سیگنال FM : روش مستقیم / روش غیرمستقیم

روش مستقیم : استفاده از VCO (اسیلاتور کنترل شونده با ولتاژ) . VCO اسیلاتوری است که فرکانس آن متناسب با ولتاژ اعمال شده به آن می‌باشد .

$$f(t) = f_0 + k v(t)$$

به عنوان مثال می‌توان از یک مدار LC با راکتانس متغیر استفاده کرد .

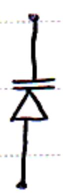


فرکانس تشدید

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,c(t)}}$$

می‌توان از دیود واراکتور به جای خازن متغیر استفاده کرد .

varactor (variable capacitor)



$$c(t) = C_0 - C_1 v(t) \qquad C_1 \ll C_0$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(C_0 - C_1 v(t)\right)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}\sqrt{1-\frac{C_1}{C_0}v(t)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1-\frac{C_1}{C_0}v(t)\right)^{-1/2} \overset{C_1/C_0 \ll 1}{=\!=} \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1+\frac{C_1}{2C_0}v(t)\right)$$

سیگنال پیام

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx \qquad x \ll 1$$

$$\left(1+(-x)\right)^{-n} \simeq 1 - n(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_c = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \\ f_\Delta = \dfrac{C_1}{2C_0}\,\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \end{cases}$$

$\dfrac{f_\Delta}{f_c} = \dfrac{C_1}{2C_0} \ll 1$ شرط مطلوب است

مزیت: شرط خوبی است

عیب: پارامترهای دیود وارکتور و در نتیجه f_c و f_Δ وابستگی شدیدی به دما دارند.

$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$

روش غیر مستقیم: $x_c(t) = A_c[\cos\omega_c t \underbrace{\cos\phi(t)}_{1} - \sin\omega_c t \underbrace{\sin\phi(t)}_{\phi(t)}]$

$\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$

$\phi_\Delta \ll 1 \Rightarrow \phi(t) \ll 1$

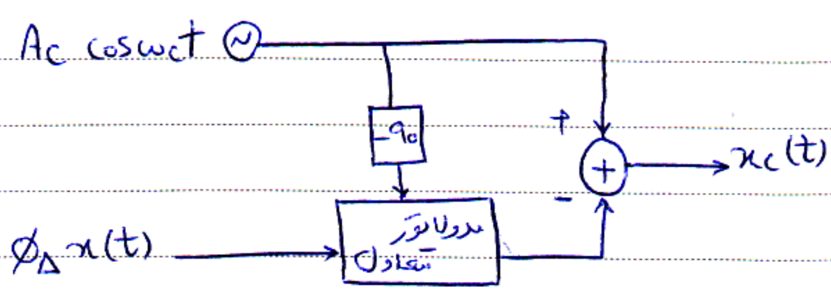
- مدولاسیون NBPM (باند باریک PM) $(\phi_\Delta \ll 1)$

$x_c(t) = A_c \cos\omega_c t - A_c \sin\omega_c t \underbrace{\phi(t)}_{\phi_\Delta x(t)}$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_\Delta x(t)) =$$

$$A_c[\underbrace{\cos\phi_\Delta x(t)}_{1} \cos\omega_c t - \underbrace{\sin\phi_\Delta x(t)}_{\phi_\Delta x(t)} \sin\omega_c t]$$

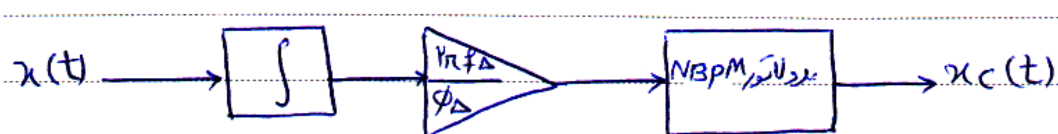
$$= A_c \cos\omega_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \sin\omega_c t$$



مدولاسیون NBFM:

$\left(\dfrac{f_\Delta}{W} \ll 1\right)$

$D \ll 1$



ضرب کننده فرکانس :

$$A_c\cos(\omega_c t+\phi(t)) \longrightarrow \boxed{\times N} \longrightarrow A_c\cos(N\omega_c t+N\phi(t))$$

$$A_c\cos(\omega_c t+\phi(t)) \longrightarrow \boxed{\text{عنصر غیرخطی}} \xrightarrow{A_1\cos(\omega_c t+\phi(t))+A_2\cos^2(\omega_c t+\phi(t))+\dots+A_n\cos^n(\omega_c t+\phi(t))} \overset{n\omega_c}{\boxed{BPF}} \longrightarrow A'_c\cos(n\omega_c t+n\phi(t))$$

با در اختیار داشتن ضرب کننده فرکانس بعد از مدولاتور NBFM ، f_c و f_Δ در n ضرب می‌شوند و مدولاتور FM ساخته می‌شود.

عنصر غیرخطی تمام هارمونیک‌های n ام را تولید می‌کند ولی دامنه هارمونیک n ام خیلی کوچکتر از هارمونیک اول است و این کار ما را در ساخت فیلتری که بتواند A_1 را خیلی ضعیف‌تر از A_n کند سخت می‌کند.

لذا معمولاً n را ۲ یا ۳ در نظر گرفته و برای n های بزرگ از یک سری چند ضرب کننده استفاده می‌کنیم.

مثال) یک مدولاتور FM با مشخصات زیر طراحی کنید؟

$W = 15\ \text{kHz} \qquad f_\Delta = 75\ \text{kHz} \qquad f_c = 80\ \text{MHz} \longrightarrow 100\ \text{MHz}$

$D=\frac{f_\Delta}{W}=\frac{75k}{15k}=5 \Rightarrow$ برای FM باند باریک داریم $\frac{f_\Delta}{W} \ll 1$ (NBFM) برای این مثال $D=5$ است.

راه حل: ابتدا یک NBFM می‌سازیم سپس با استفاده از یک ضرب کننده فرکانسی آن را تبدیل می‌کنیم.

$D_1 \triangleq \frac{f_{\Delta_1}}{W_{15}} = 0.002 \ll 1 \Rightarrow f_{\Delta_1} = 30\ Hz$

ضریب افزایش فرکانس $N = \frac{75\ kHz}{30\ Hz} = 2500 = 2^m 3^n$

$\left.\begin{array}{l} m=10 \\ n=1 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 3072 \Rightarrow \frac{75\ k}{f_{\Delta_1 new}} = 3072 \Rightarrow f_{\Delta_1 new} = 25\ Hz$

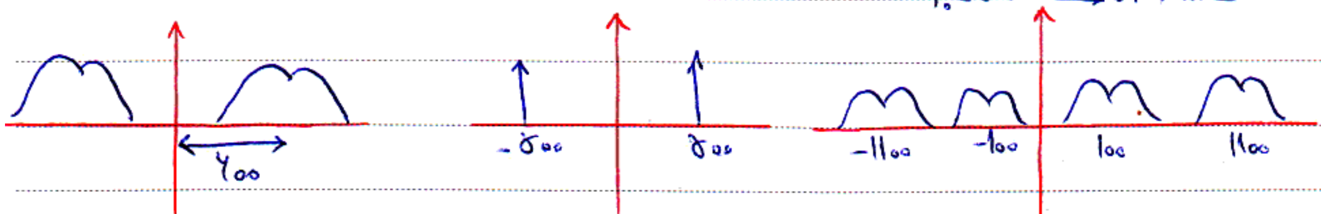
f_c شرط : $f_c > W \Rightarrow f_c \triangleq 200\ k$

باند باریک

$x(t) \rightarrow$ [مدولاتور NBFM] ($f_\Delta = 25\ Hz$, $f_c = 200\ kHz$) $\xrightarrow{f_c = 200\ kHz,\ f_\Delta = 25\ Hz}$ [$\times 3072$] $\xrightarrow{f_c \cong 600\ MHz,\ f_\Delta = 75\ k}$ $\otimes$ $\rightarrow$ [BPF] $\rightarrow x_c(t)$

80 → 100

$f_0 = 500\ MHz \rightarrow 520\ MHz$



شکل مدار این است که فرکانس بالایی دارد و لذا تجهیزات با فرکانس بالا استفاده شود (هزینه بر است). راه حل

این است که مقدار فرکانس تا این حد بالا نرود

$x(t) \rightarrow$ [NBFM] ($f_\Delta = 25\ Hz$, $f_c = 200\ kHz$) $\xrightarrow{f_c = 200\ k,\ f_\Delta = 25}$ [$\times 64$] $\xrightarrow{f_c = 12.8\ M,\ f_\Delta = 25 \times 64}$ $\otimes$ ($10.8\ MHz$) $\rightarrow$ [BPF] $\xrightarrow{2\ M,\ 64 \times 25}$ [$\times 48$] $\xrightarrow{96\ M,\ 64 \times 48 \times 25}$ $x_c(t)$

ساختار آرمسترانگ

$10.72 \longrightarrow 11.14$

در سایه سار اندیشه ، بی هیچ چشم داشت زمینی

عهد بسته ایم آسمانی شویم .

در این محفل علمی با ما همراه باشید .

زمان : همین حالا تا همیشه

مکان : تارنمای برق ایران ؛ www.tbi-net.com

رسیده ایم پر از رنج راه تا دریا

خوشا یکی شدن رودها خوشا دریا

نه ما نه من نه تو ، او نقطه سرانجام است

بیا که بی من و تو ما شویم و ما دریا

من و تو چشمه باران ابر او بودیم

از ابتدا دریا بود و انتها دریا