

* قانون احتمال کل :

گاهی اوقات جامعه به چند بخش تقسیم می شود، اگر احتمال یا سهم هر بخش از جامعه

برابر $P(A_i)$ باشد، احتمال اتفاق افتادن سیامد A در کدام بخش ها با $P(A|A_i)$

نشان داده می شود. احتمال رخ دادن سیامد A در کل جامعه برابر است با:

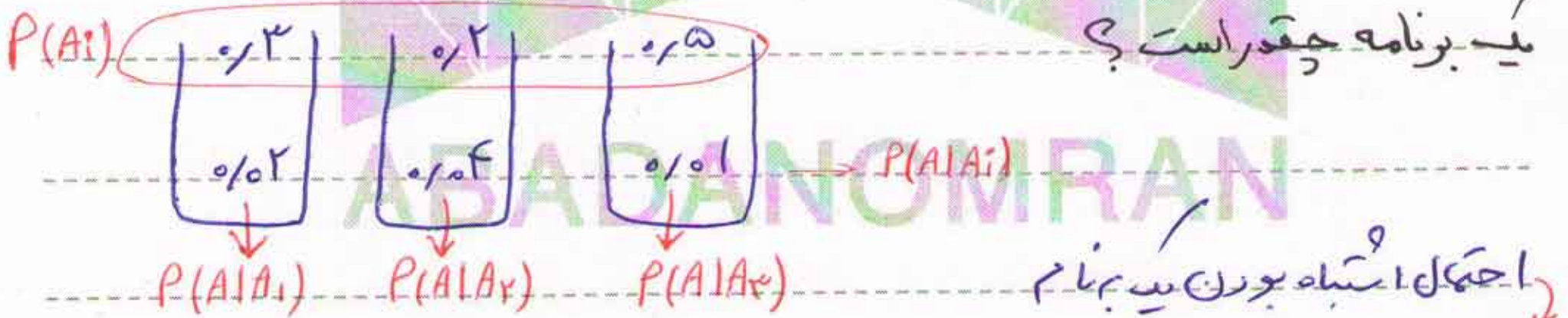
$$P(A) = \sum_{i=1}^K P(A_i) \times P(A|A_i)$$

مثال یک شرکت برنامه نویسی توسط سه برنامه نویس، کارهای خود را انجام می دهد

اگر سهم هر یک از آن ها به ترتیب برابر 0.3 ، 0.2 و 0.5 باشد و احتمال استیاب

برای هر کدام از آن ها به ترتیب 0.2 ، 0.4 و 0.1 باشد، احتمال استیاب بودن

یک برنامه چقدر است؟



$$P(A) = \sum_{i=1}^K P(A_i) \times P(A|A_i) = (0.3 \times 0.2) + (0.2 \times 0.4) + (0.5 \times 0.1) = 0.15$$

مثال با توجه به تابع چگالی زیر $P(x=2)$ را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} & x=0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$P(x=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

ادامه سوال | احتمال این که حداقل چهار بار موفقیت داشته باشیم:

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5)$$

$$\binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

توزیع دو جمله‌ای گسسته است.

$$\binom{N}{N-1} = \binom{N}{1} = N$$

$$\binom{N}{N} = \binom{N}{0} = 1$$

$$0! = 1$$

نکات:

* توزیع نرمال

یک توزیع پیوسته با دو پارامتر μ و σ^2 که به ترتیب میانگین و واریانس

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

برای احتمال $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$ ←

توزیع نرمال استاندارد

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

برای محاسبه $P(X < x)$ زمان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باید

توزیع نرمال را به نرمال استاندارد تبدیل کنیم.

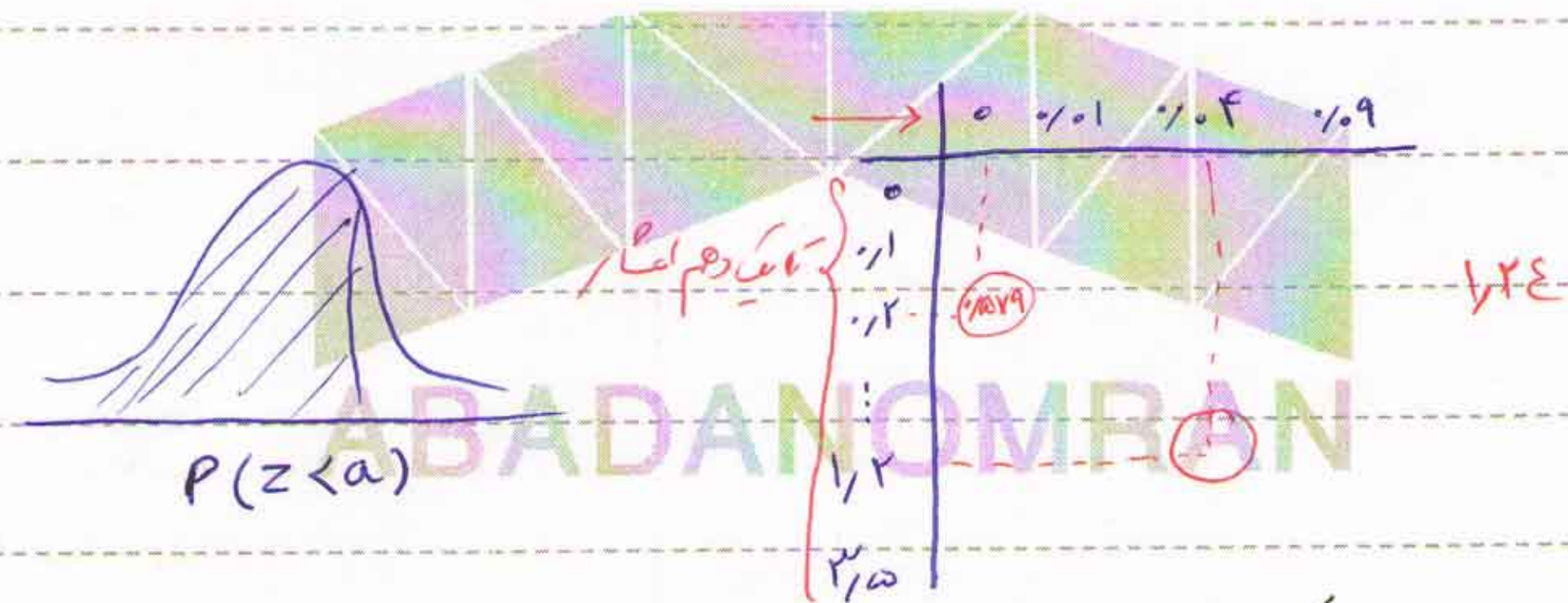
$$P(X < x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

که عدد گذاری می‌کنیم

مسئله ۱: $X \sim (4, 25)$ باشد، احتمال های زیر را محاسبه کنید

الف) احتمال اینکه $X < 5$ باشد: $P(X < 5)$

$$P(X < 5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{5 - 4}{\sqrt{25}}\right) = P\left(Z < \frac{1}{5}\right) = \Phi(0.2) = 0.579$$



ب) احتمال اینکه $X < 7$ باشد:

$$P(X < 7) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{7 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{7 - 4}{\sqrt{25}}\right) = P\left(Z < \frac{3}{5}\right) = \Phi(0.6) = 0.726$$

$$P(X > 6) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{6 - 4}{\sigma}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z < 0.4) = 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

$$P(X < 3) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3 - 4}{\sigma}\right) = P\left(Z < -\frac{1}{5}\right) = 1 - P(Z < 0.2) = 1 - 0.579 = 0.421$$

$$\textcircled{1} P(Z < a) = \Phi(a)$$

$$\textcircled{2} P(Z < -a) = 1 - \Phi(a)$$

$$\textcircled{3} P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$$

$$\textcircled{4} P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P(5 < X < 7) = P\left(\frac{5-4}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7-4}{5}\right) = P(0.2 < Z < 0.6)$$

$$= \Phi(0.6) - \Phi(0.2) = 0.7257 - 0.5793 = 0.1464$$

نکته * میانگین و میانگین در توزیع نرمال در نقطه ماکزیمم نمودار است

نکته ۱ در توزیع های پیوسته احتمال در یک نقطه برابر صفر است : $P(X=a) = 0$