

تابع چگالی: فرض کنید  $x$  یک متغیر تصادفی گسسته باشد، برای این متغیر احتمال در هر نقطه روی محور طولها شکل یک تابع حقیقی با ویژگیهای زیری دهد:

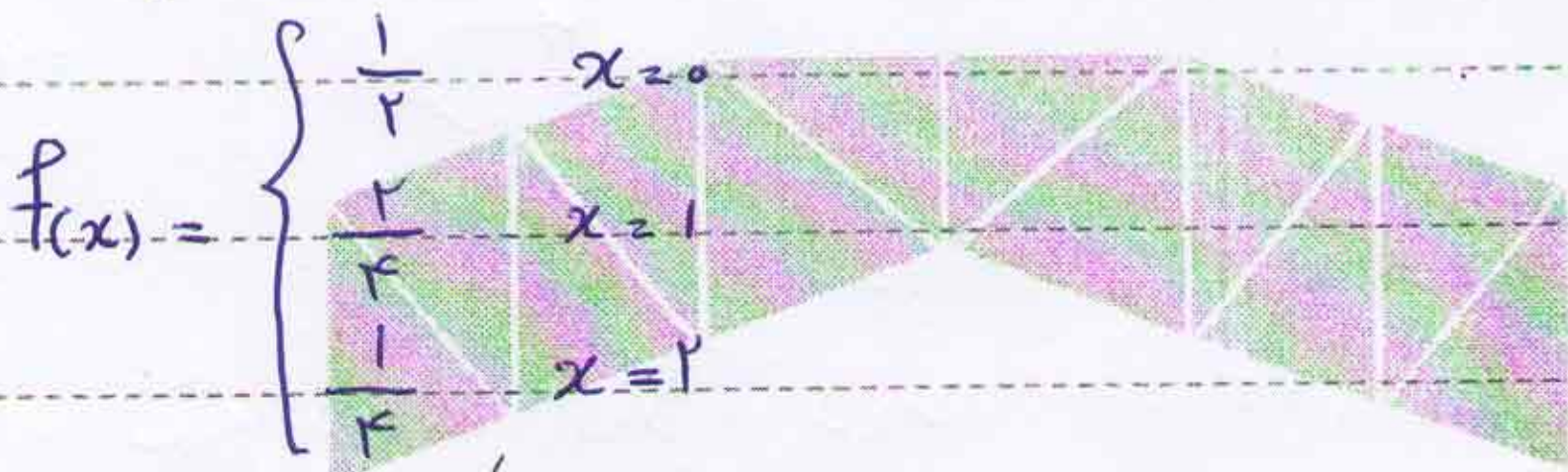
$$f(x_i) \geq 0 \quad \sum f(x_i) = 1$$

**مثال** سه ای را دو بار پرتاب می کنیم، فرض کنید  $x$  تعداد شیرها باشد، تابع چگالی

آن را بنویسید:  $S = 2^2 = 4$  فضای نمونه

$$S = \{ (HH) (HT) (TH) (TT) \}$$

۲ دایره ۲ تعداد شیر



\* محاسبه امید ریاضی و واریانس با استفاده از تابع چگالی:

$$E(x) = \sum x_i f(x_i)$$

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 f(x_i)$$

**مثال** برای تابع چگالی زیر امید واریانس را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0 \\ \frac{3}{8} & x=1 \\ \frac{3}{8} & x=2 \\ \frac{1}{8} & x=3 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum x_i f(x_i) = (0 \times \frac{1}{8}) + (1 \times \frac{3}{8}) + (2 \times \frac{3}{8}) + (3 \times \frac{1}{8}) = 1.5$$

$$E(x^2) = (0^2 \times \frac{1}{8}) + (1^2 \times \frac{3}{8}) + (2^2 \times \frac{3}{8}) + (3^2 \times \frac{1}{8}) = 3$$



$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E^2(x) = 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

واریانس همیشه مثبت است

**مثال** امید واریانس را برای مثال قبلی (سکه) بدست آورید:

$$E(x) = \sum x_i f(x_i) = (0 \times \frac{1}{4}) + (1 \times \frac{1}{4}) + (2 \times \frac{1}{4}) = 1$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 f(x_i) = (0 \times \frac{1}{4}) + (1 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$$

\* توزیع برنولی:

**تعریف آزمایش برنولی:** آزمایش به معنای نمونه‌ای است که تنها دو پیامد دارد مثل

شکست - پیروزی. آزمایش برنولی فقط یکبار انجام می‌دهیم.

**متغیر تصادفی برنولی:**

$$P(x=1) = P$$

X=1

$$P(x=0) = 1 - P$$

X=0

← اگر دارای توزیع برنولی با پارامتر P است.

$$X \sim b(P)$$

که احتمال موفقیت

$$f(x) = \begin{cases} P^x (1-P)^{1-x} & \text{اگر } x=1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$$E(x) = P$$

$$\text{Var}(x) = P(1-P)$$



**مسئله** احتمال معیوب بودن یک کالا ارو است، تابع خطای برای انتخاب یک کالا و معیوب بودن آن را بنویسید. معیوب بودن کالا: موفقیت  $X=1$

$$P(X=1) = 0.1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.1^x (1-0.1)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$$E(x) = P$$

$$Var(x) = 0.1 \times 0.9 = 0.09$$

**مسئله** تابع خطای برای پاسخ صحیح دادن به یک سوال چهارگزینه‌ای را بنویسید.

$$P(X=1) = 0.25 = P$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.25^x (1-0.25)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$$E(x) = P = \frac{1}{4}$$

$$Var(x) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

\* توزیع دو جمله‌ای: اگر یک آزمایش برنولی پس از یکبار انجام شود، با آن

آزمایش دو جمله‌ای می‌نویسیم.  $n$  و  $x$  و  $P$  و  $(1-P)^{n-x}$  و  $P^x$  و  $\binom{n}{x}$

$n$ : تعداد تکرار آزمایش برنولی.  $x$ : تعداد موفقیت‌ها مشاهده شده.  $P$ : احتمال موفقیت.  $1-P$ : احتمال شکست.

$$E(x) = nP$$

$$Var(x) = nP(1-P)$$



احتمال استیفاء در برنامه نویسی توسط یک برنامه نویس ۰.۱۰۵ است. مثال P

تابع خطایی برای درست نویسن ۵ برنامه را بنویسید.

$$1 - P = 0.05 \rightarrow P = 0.95 \quad \text{و} \quad n = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} (0.95)^x (0.05)^{5-x} & x=0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{جایگزین} \end{cases}$$

