«بسمه‌تعالی»

مجموعه جزوات کلاسی

خانه عمران

محاسبه سختی جانبی سیستم‌های خطی

تهیه و تنظیم: امیرحسین خلوتی
www.khalvati.ir

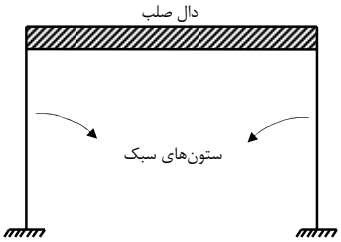
به نام خدا

محاسبه سختی جانبی سیستم‌های الاستیک خطی

سازه‌های ساده:

مبحث دینامیک سازه‌ها از مطالعه سازه‌های ساده مانند یک منبع هوایی، یک سایه‌بان متکی به ستون‌های سبک و... شروع می‌شود و هدف مطالعه ارتعاش این سازه‌ها تحت اثر نیروی جانبی افقی مؤثر در بالای سازه یا ارتعاش افقی تکیه‌گاه به علت زلزله می‌باشد. این سازه‌ها به این علت ساده نامیده می‌شوند که می‌توانند توسط یک جرم متمرکز متکی بر یک پایه بدون وزن با سختی جانبی K مدل شود. به عنوان مثال اگر یک قاب یک طبقه مطابق شکل-۱، از یک دال بتنی صلب با ستون‌های سبک ساخته شود با این مدل‌سازی منطبق می‌باشد که به علت صلبیت دال، انعطاف‌پذیری جانبی ساختمان فقط توسط ستون‌های سبک تأمین می‌گردد.

* در اینجا هدف محاسبه میزان سختی جانبی (K) قاب است. با این شرط که تغییر شکل جانبی کوچک است و تغییر شکل ستون‌های نگهدارنده در محدوده خطی است.

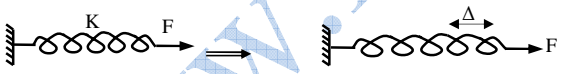


شکل- ۱

ایده فنر ساده خطی

فنری با سختی K را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی F قرار می‌گیرد.

با این فرض که فنر به صورت خطی رفتار می‌کند، طبق قانون هوک می‌توان سختی و تغییر مکان فنر را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$F = K \cdot \Delta \quad \Rightarrow \quad K = F / \Delta \qquad (۱)$$

$$\Delta = F / K \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه (۱) می‌توان سختی را به صورت زیر تعریف کرد:

سختی عبارت است از نیرویی که لازم است تا تغییر مکانی برابر با واحد در امتداد نیرو ایجاد کند. (اگر $\Delta = ۱$ باشد، $F = K$ می‌شود)

مجدداً تأکید می‌نماید این تعریف زمانی صادق است که رفتار خطی برقرار باشد. همین ایده را دقیقاً می‌توانیم برای قاب شکل- ۱ به کار ببریم و براساس شرایط مختلف تکیه‌گاهی ستون‌ها و صلبیت تیر، نیروی لازم برای تغییر مکان جانبی واحد قاب را محاسبه نماییم. مقدار نیروی محاسبه شده همان سختی جانبی قاب خواهد بود. نکته‌ای که از رابطه

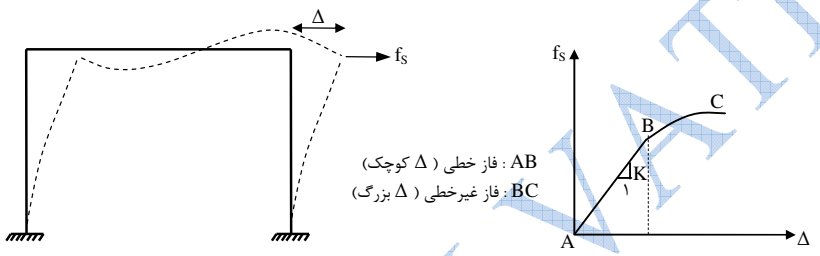
WWW.KHALVATI.IR

(۲) نتیجه می‌شود آن است که هر چقدر میزان سختی بیشتر باشد، تغییر مکان جانبی کوچکتر خواهد شد. (K در مخرج کسر است)

سیستم نشان داده شده در شکل-۲ را بدون هیچ‌گونه تحریک دینامیکی و تحت اثر نیروی خارجی استاتیکی f_S در امتداد کف صُلب در نظر بگیرید. این نیرو تغییر مکان Δ را ایجاد خواهد کرد. براساس ایده فنر ساده خطی در تغییر شکل‌های کوچک و مقادیر کم Δ، رابطه f_S و Δ به صورت خطی است:

$$f_S = K \cdot \Delta \qquad (۳)$$

که در این رابطه K همان سختی جانبی قاب است. اگر تغییر شکل‌های جانبی خیلی زیاد شوند، این رابطه دیگر برقرار نمی‌باشد. تعیین رابطه f_S و Δ یک مسأله متعارف در تحلیل سازه‌ها است. به این ترتیب که تغییر مکان واحدی به قاب اعمال می‌نماییم. (Δ = ۱) و نیروی متناظر آن را محاسبه می‌کنیم. این نیرو همان سختی جانبی قاب است. (براساس تعریف سختی).

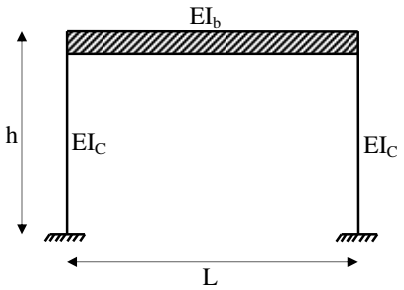


شکل- ۲

با توجه به رابطه (۳) واحد سختی جانبی را می‌توان به صورت $\frac{\text{نیرو}}{\text{تغییر مکان}}$ بیان کرد. (مثلاً kg/cm، ton/cm، ton/m، N/cm و...)

محاسبه سختی جانبی یک قاب یک درجه آزادی با تکیه‌گاه گیردار:

قاب شکل- ۳ را با دهانه L، ارتفاع h و مصالح با ضریب الاستیسیته E با دو تکیه‌گاه گیردار در نظر بگیرید. ممان اینرسی تیر و ستون در حول محور خمش برای تیر و ستون به ترتیب I_b و I_C می‌باشد. سختی جانبی را برای دو حالت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل- ۳

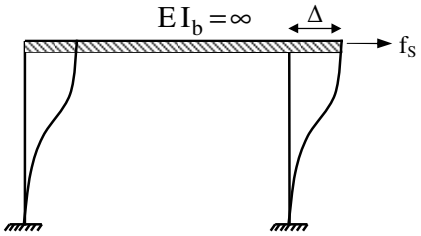
حالت الف- تیر کاملاً صلب است (به عبارتی $EI_b \rightarrow \infty$)

در این حالت که در سیستم قاب‌های ساختمانی با فرض رفتار دیافراگم صلب در کف طبقه رخ می‌دهد، سختی هر ستون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱۲ EI_C}{h^۳} \quad (۴) \Rightarrow \text{کلی } K_t = \sum K_{\text{هر ستون}} \Rightarrow \text{در حالت دو ستونی } K_t = \frac{۲۴ EI_C}{h^۳} \quad (۵)$$

WWW.KHALVATI.IR

در این حالت شرایط مرزی ستون‌ها در هر دو انتها، گیردار می‌باشد.



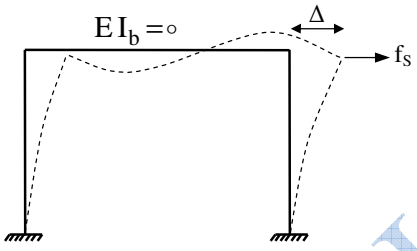
شکل- ۴: شکل تغییر مکان قاب در حالت کف صلب

حالت ب- تیر بدون صلبیت است (به عبارتی $EI_b \rightarrow 0$)

در این حالت سختی هر ستون از رابطه زیر به دست می‌آید:

هر ستون $K = \frac{3 EI_C}{h^3}$ (۶) $\Rightarrow$ $K_t = \frac{6 EI}{h^3}$ (۷)

رابطه (۶) سختی یک ستون و رابطه (۷) سختی مجموع دو ستون را بیان می‌کند. در این حالت تغییر شکل جانبی قاب مانند شکل- ۵ می‌باشد.



شکل- ۵: شکل تغییر مکان قاب در حالت کف انعطاف‌پذیر

در این حالت ستون‌ها در پایین، گیردار و در بالا مفصلی هستند و مانند یک ستون طره عمل می‌کنند.

حالت ج- تیر دارای سختی خمشی EI_b است.

در این حالت اگر از تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر کنیم، مقدار سختی جانبی قاب برای حالت‌های مختلف I_b و I_C به صورت زیر به دست می‌آید:

کلی قاب $K_t = \frac{24 EI_C}{h^3}\eta$ (۸)

که در رابطه (۸) ضرایب η و ρ عبارتند از:

$$\eta = \frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \quad ; \quad \rho = \frac{I_b}{4 I_C}$$

ρ نسبت سختی خمشی تیر به ستون می‌باشد.

اگر ρ مساوی ∞ و 0 در نظر گرفته شود، به ترتیب روابط ۵ و ۷ به دست می‌آیند. (حالات حدی)

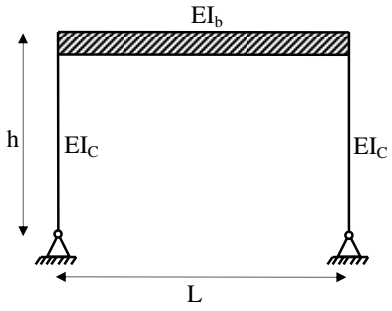
تقریباً می‌توان گفت

$$\rho < 0/1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{4} \; ; \; \rho > 10 \Rightarrow \eta = 1$$

www.KHALVATI.ir

محاسبه سختی جانبی یک قاب یک درجه آزادی با تکیه‌گاه مفصلی:

قاب شکل- ۶ را با همان مشخصات قاب شکل- ۳ در نظر بگیرید. در این حالت سختی خمشی را فقط اگر تیر کاملاً صلب باشد محاسبه می‌کنیم، زیرا در غیر این‌صورت ستون‌ها به صورت اعضا دو سر مفصل در می‌آیند که کل قاب ناپایدار خواهد شد.



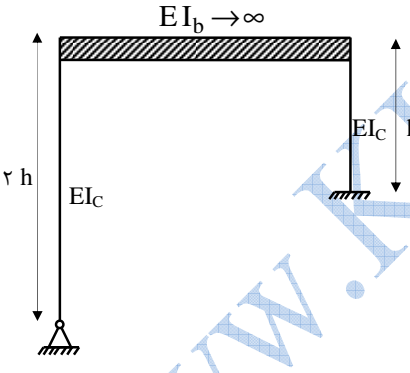
شکل- ۶

ستون‌ها مانند عضوی که در بالا گیردار و در پایین مفصلی است عمل می‌کنند $\Rightarrow$ تیر کاملاً صلب $EI_b \to \infty$

پس می‌توان ستون‌ها را به صورت ستون طره‌مانند حالت (ب) قاب با تکیه‌گاه گیردار (ولیکن به صورت وارونه) در نظر گرفت:

هر ستون $K = \frac{۳ EI_C}{h^۳}$ (۹) $\Rightarrow$ کل قاب $K_t = \frac{۶ EI_c}{h^۳}$ (۱۰)

مثال- سختی جانبی قاب شکل زیر را محاسبه نمایید.



حل: چون کف صلب است، برای ستون سمت چپ از رابطه (۹) (چون مفصلی است) و برای ستون راست از رابطه (۴) استفاده می‌نماییم. و در نهایت سختی کل قاب برابر با مجموع سختی ستون‌ها می‌شود:

ستون سمت چپ: $K_۱ = \frac{۳EI_C}{(۲h)^۳} = \frac{۳}{۸} . \frac{EI_C}{h^۳}$

ستون سمت راست: $K_۲ = \frac{۱۲EI_C}{h^۳}$

در کل: $K_t = K_۱ + K_۲ = \frac{۳}{۸} \frac{EI_C}{h^۳} + ۱۲ \frac{EI_C}{h^۳} = \frac{۹۹}{۸} . \frac{EI_C}{h^۳} = ۱۲/۳۷ \frac{EI_C}{h^۳}$

www.KHALVATI.ir

محاسبه سختی قاب‌های بادبندی شده

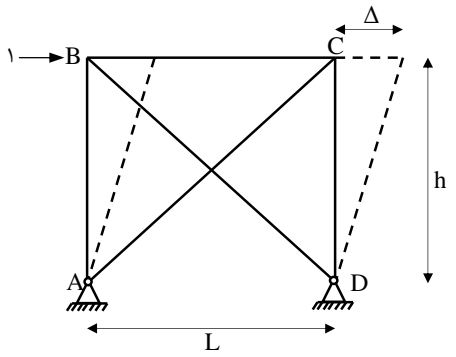
برای محاسبه سختی قاب‌های بادبندی شده،با استفاده از روش کار مجازی، جابه‌جایی متناظر با نیروی واحد را محاسبه می‌کنیم:

طبق روش کار مجازی $\Delta = \sum \frac{F_i . f_i \; L_i}{A_i \; E_i}$ (۱۱)

چون نیروهای داخلی f_i و F_i هر دو براساس بار واحد هستند، لذا $f_i = F_i$، پس می‌توان نوشت:

$$\Delta = \sum \frac{F_i^2 \; L_i}{A_i \; E_i} \qquad (۱۲)$$

قاب شکل- ۷ را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی جانبی واحد قرار گرفته است:



شکل- ۷:

اگر نیروی اعضاء را محاسبه نماییم:

$$F_{AB} = 0 \quad ; \quad F_{AC} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{L^2}} = \frac{d}{L} \quad ; \quad F_{BC} = -1$$

$$F_{CD} = \frac{h}{L} \quad ; \quad F_{BD} = 0 \qquad \textit{از عضو فشاری صرف‌نظر می‌کنیم}$$

d در روابط فوق، قطر قاب یا طول بادبند است.

اگر این مقادیر را در رابطه (۱۲) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{1}{E}\left[\frac{1 * L}{A_g} + \frac{\frac{h^2}{L^2} * h}{A_C} + \frac{\frac{d^2}{L^2} * d}{A_b}\right] \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳) A_g، A_b و A_C به ترتیب سطح مقطع تیر، بادبند و ستون است. طبق تعریف سختی داریم:

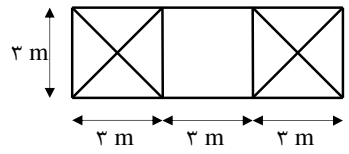
$$K = \frac{F}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{\frac{L}{A_g} + \frac{h^3}{L^2 A_C} + \frac{d^3}{L^2 A_b}} \qquad (۱۴)$$

WWW.KHALVATI.IR

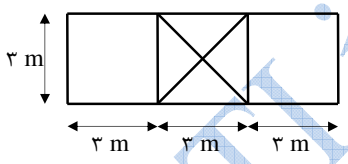
معمولاً سطح مقطع ستون‌ها و تیرها بسیار بزرگتر از بادبند است و بنابراین می‌توان از جملات اول و دوم مخرج کسر در مقابل جمله سوم صرف‌نظر کرد. این بدین معناست که جابه‌جایی افقی قاب عمدتاً ناشی از تغییر شکل بادبند است و نه اعضاء قاب. در این صورت رابطه ساده زیر به دست می‌آید که برای اغلب موارد عملی قابل استفاده است:

$$K=\frac{E L^{2} A_b}{d^{3}} \qquad (۱۵)$$

مثال[1]- سختی قاب‌های زیر را محاسبه کنید و با حالتی که تیر و ستون صلب فرض می‌شوند مقایسه نمایید. کلیه ستون‌ها IPB20 و تیرها IPE27 می‌باشد. بادبندهای قاب F_1 از ناودانی ۱۰ و بادبندهای قاب F_2 از ناودانی ۱۲ می‌باشد.



قاب F_1



قاب F_2

حل: سطح مقطع مقاطع مذکور عبارتند از (به کمک جدول اشتال):

IPB20: $A = ۷۸/۱\ cm^2 = A_C$ UNP10 : $A = ۱۳/۵\ cm^2 = A_b$

IPE27: $A = ۴۵/۹\ cm^2 = A_g$ UNP12 : $A = ۱۷\ cm^2 = A_b$

$L = h = ۳\ m$; $d = ۴/۲۴m$, $E = ۲/۰۶ \times ۱۰^{۶}$ (فرض می‌شود)

به کمک رابطه (۱۴) می‌توان نوشت:

$$F_۱ \text{ سختی قاب } K_۱ = ۲ \times \frac{۲/۰۶ \times ۱۰^{۶}}{\frac{۳۰۰}{۴۵/۹} + \frac{۳۰۰^{۳}}{۳۰۰^{۲} \times ۷۸/۱} + \frac{۴۲۴^{۳}}{۳۰۰^{۲} \times ۱۳/۵}} = ۵۶۳۵۱\ kg/cm$$

چون دو دهانه بادبندی دارد، در عدد ۲ ضرب شده است.

$$F_۲ \text{ سختی قاب } K_۲ = \frac{۲/۰۶ \times ۱۰^{۶}}{\frac{۳۰۰}{۴۵/۹} + \frac{۳۰۰}{۷۸/۱} + \frac{۴۲۴^{۳}}{۳۰۰^{۲} \times ۱۷}} = ۳۴۲۲۰\ kg/cm$$

اگر از رابطه تقریبی (۱۵) استفاده نماییم، خواهیم داشت:

$K_۱ = ۶۵۶۷۱\ Kg/cm$; $K_۲ = ۴۱۳۴۹\ Kg/cm$

در اینجا می‌توان خطای موجود و تقریب محاسبات را بررسی کرد:

$$\text{برای قاب } F_۱ \quad \left(\frac{\text{سختی به دست آمده از رابطه تقریبی (۱۵)}}{\text{سختی به دست آمده از رابطه دقیق (۱۴)}} - ۱\right) \times ۱۰۰ = \left(\frac{۶۵۶۷۱}{۵۶۳۵۱} - ۱\right) \times ۱۰۰ = ٪۱۷$$

$$\text{برای قاب } F_۲ \quad \left(\frac{\text{سختی به دست آمده از رابطه تقریبی (۱۵)}}{\text{سختی به دست آمده از رابطه دقیق (۱۴)}} - ۱\right) \times ۱۰۰ = \left(\frac{۴۱۳۴۹}{۳۴۲۲۰} - ۱\right) \times ۱۰۰ = ٪۲۱$$

[1] مرجع: مهندسی زلزله، جلد اول، دکتر حسن مقدم، مرکز مطالعات و تحقیقات وزارت راه و ترابری، ص ۴۷۹ و ۴۸۰

www.KHALVATI.ir

ملاحظه می‌شود رابطه (۱۵) برای قاب F_1 در حدود ۱۷٪ و برای قاب F_2 در حدود ۲۱٪ تقریب دارد و در واقع این رابطه، سختی‌ها را قدری بیشتر از مقادیر واقعی نشان می‌دهد.

* البته اگر تیر داخل کف صلب قرار گیرد و تغییر طول آن محدود شود دیگر می‌توان در رابطه (۱۴) از اثر تیرها صرف‌نظر نمود و فقط اثر ستون‌ها و بادبندها را در نظر گرفت که در این صورت رابطه دقیق‌تر برای سیستم با کف صلب به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \frac{E}{\frac{h^3}{L^2 A_C} + \frac{d^3}{L^2 A_b}} \qquad (16)$$

پس در حالتی که تیرها صلب باشند، از رابطه (۱۶) که مقدار بیشتری از (۱۴) می‌دهد (چون مخرج کسر کوچکتر است) می‌توان استفاده نمود و در نتیجه حاصل رابطه (۱۵) به رابطه (۱۶) نزدیک‌تر می‌شود و تقریب آن کمتر خواهد شد. به عنوان مثال برای قاب F_1 اگر از رابطه (۱۶) استفاده کنیم:

$$K_1 = ۲ \times \frac{۲/۰۶ \times ۱۰^۶}{\frac{۳۰۰^3}{۳۰۰^2 \times ۷۸/۱} + \frac{۴۲۴^3}{۳۰۰^2 \times ۱۳/۵}} = ۶۱۸۸۲ \ kg/cm > \underbrace{۵۶۳۵۱}_{\text{نتیجه به دست آمده از رابطه (۱۴)}}$$

حال تقریب جواب رابطه (۱۵) را نسبت به این عدد محاسبه می‌کنیم:

$$(\frac{۶۵۶۷۱}{۶۱۸۸۲} - ۱) \times ۱۰۰ = ٪۶$$

* ملاحظه می‌شود که تقریب از ۱۷٪ به ۶٪ تقلیل می‌یابد.

WWW.KHALVATI.IR